

Calculo de VaR e Apreçamento de Opções com Processos não Gaussianos

José Fajardo Barbachan
IBMEC Business School
pepe@ibmecrj.br

20 de Agosto de 2004

Introdução

- Motivação
 - Hipótese de **Normalidade** Não Verificada
 - Aplicabilidade a Dados Alemães
 - Deficiência no **Apreçamento de Derivativos**
 - Necessidade de Melhora nas **Medidas de Risco** no Brasil

Introdução

- Resultados Esperados
 - Boa aderência à maioria dos dados brasileiros
 - Melhora no **apreçamento** de derivativos
 - Maior **precisão** em medidas de risco

Revisão Bibliográfica

- 1977 → Barndorff-Nielsen - Desenvolve a Distribuição **Hiperbólica**;
- 1978 → Barndorff-Nielsen - Expande os conceitos e desenvolve a Distribuição **Generalizada Hiperbólica**;
- 1992 → Blæsild e Sørensen - Criam o primeiro **programa** de estimação dos parâmetros da **Hiperbólica** multidimensional;

- 1995 → Eberlein e Keller - Introduzem a distribuição **Hiperbólica em finanças**;
- 1997 → Keller - **Apreçamento** de derivativos utilizando distribuições hiperbólicas;
- 1999 → Prause - Estima os parâmetros da distribuição **Generalizada Hiperbólica** em uma e duas dimensões, **apreça derivativos** e calcula **VaR**, usando dados alemães e americanos.;

No Brasil

- 2001 → Fajardo et al. - Verificam pela primeira vez a aderência da distribuição **Hiperbólica** a dados brasileiros (Revista Brasileira de Econometria).
- 2002 → Fajardo e Farias - Verificam a aderência da distribuição **Generalizada Hiperbólica** a dados brasileiros (Working Paper 52 Banco Central do Brasil).

Base de Dados

- Ações da Bovespa
- Liquidez
- Setores
- Natureza Jurídica

Base de Dados

- Origem: Económica
- $Retorno_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$
- Ajustes: Dividendos, Splits, Grupamentos e Direitos

Base de Dados

<i>Ação</i>	<i>Código</i>	<i>Início</i>	<i>Final</i>
Banco Itaú - PN	Itau4	01/07/1994	13/12/2001
Banco do Brasil - PN	Bbas4	01/07/1994	13/12/2001
Bradesco - PN	Bbdc4	01/07/1994	13/12/2001
Cemig - PN	Cmig4	01/07/1994	13/12/2001
Cia Siderúrgica Nacional - ON	Csna3	01/07/1994	13/12/2001
Eletrobrás - PNB	Elet6	01/07/1994	13/12/2001
Embratel Participações - PN	Ebtp4	21/09/1998	13/12/2001
Ibovespa	Ibvsp	01/07/1994	13/12/2001
Petrobrás - PN	Petr4	01/07/1994	13/12/2001
Petrobrás Distribuidora - PN	Brdt4	04/07/1994	13/12/2001
Tele Celular Sul - PN	Tcsl4	21/09/1998	13/12/2001
Tele Nordeste Celular - PN	Tnep4	21/09/1998	13/12/2001
Telemar - PN	Tnlp4	22/09/1998	13/12/2001
Telesp - PN	Tlpp4	01/07/1994	13/12/2001
Vale do Rio Doce - PNA	Vale5	01/07/1994	13/12/2001

Distribuições Hiperbólicas

$$D_{GH}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{(\lambda - \frac{1}{2})}{2}} K(\lambda, \alpha, \delta, \mu, \beta)$$

com,

$$K(\lambda, \alpha, \delta, \mu, \beta) = K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp(\beta(x - \mu))$$

onde,

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{(\lambda - \frac{1}{2})} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

e

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x\left(y + y^{-1}\right)\right) dy, x > 0$$

é a função modificada Bessel do segundo tipo com índice λ .

Distribuições Hiperbólicas

- Os parâmetros da função têm o seguinte domínio:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$-\alpha < \beta < \alpha$$

$$\delta, \alpha > 0.$$

Distribuições Hiperbólicas

- Fatos Estilizados

- Assimetria

- * β

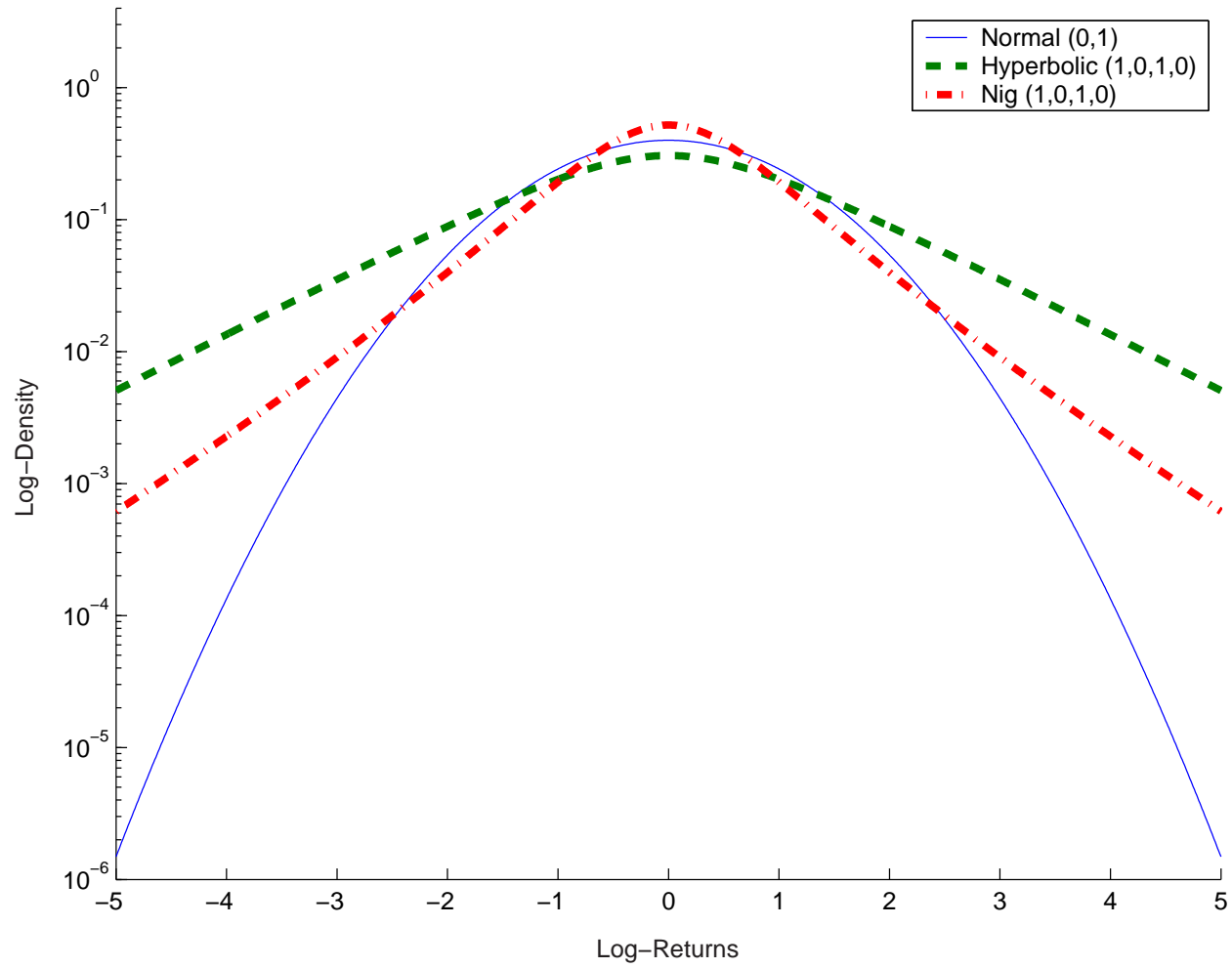
- Caudas Grossas

- * $gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta) \sim |x|^{\lambda-1} \exp((\mp\alpha + \beta)x)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$

Distribuições Hiperbólicas

- Principais Subclasses
 - Hiperbólica ($\lambda = 1$)
 - Normal Inversa Gaussiana ($\lambda = -0.5$)
 - Hiperbóle ($\lambda = 0$)
 - Hiperbolóide ($\lambda = 0.5$)

Log-densidades da Normal, Hyp e NIG



Distribuições Hiperbólicas

- Distribuições Limites
 - Normal - $\delta \rightarrow \infty$ e $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$
 - T de Student - $\alpha = \beta = \mu = 0$ e $\lambda < 0$
 - Laplace, Variância-gamma, Cauchy

Estimação dos Parâmetros

- Máxima Log-Verossimilhança
 - **Independência** dos retornos
 - Único estimador **não viesado** [Prause(1999)]
 - Grande **esforço** computacional

$$L = \sum_{i=1}^n \log (GH(x_i; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda))$$

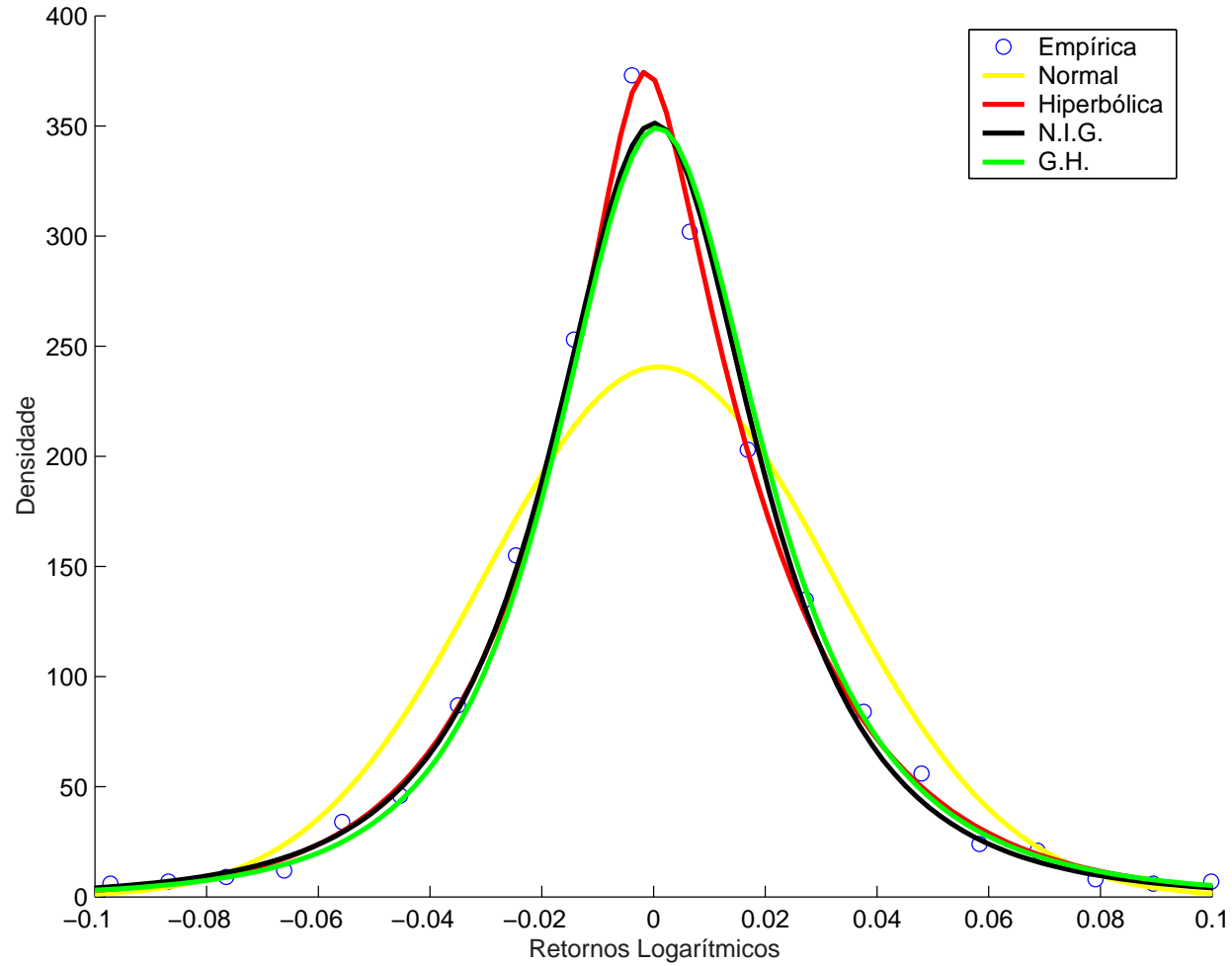
Algoritmo de Estimação

- Refined Bracketing Method
- Downhill Simplex Method
- Newton Method
- Genetic Algorithms

Resultados

- Análise de Gráficos
- Teste Qui-Quadrado
- Análise de Distâncias

Densidades de Vale do Rio Doce



Log-Densidades de Vale do Rio Doce

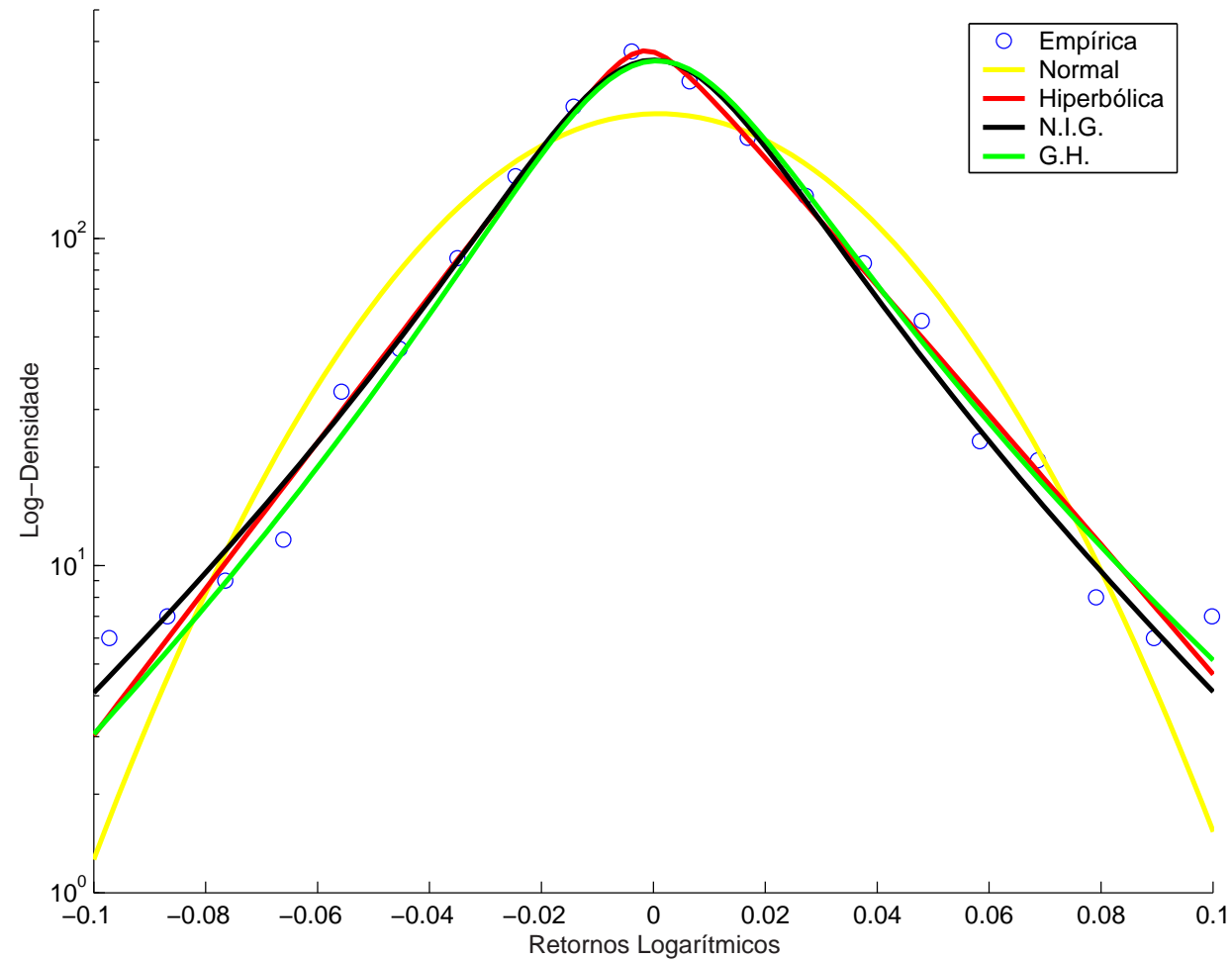
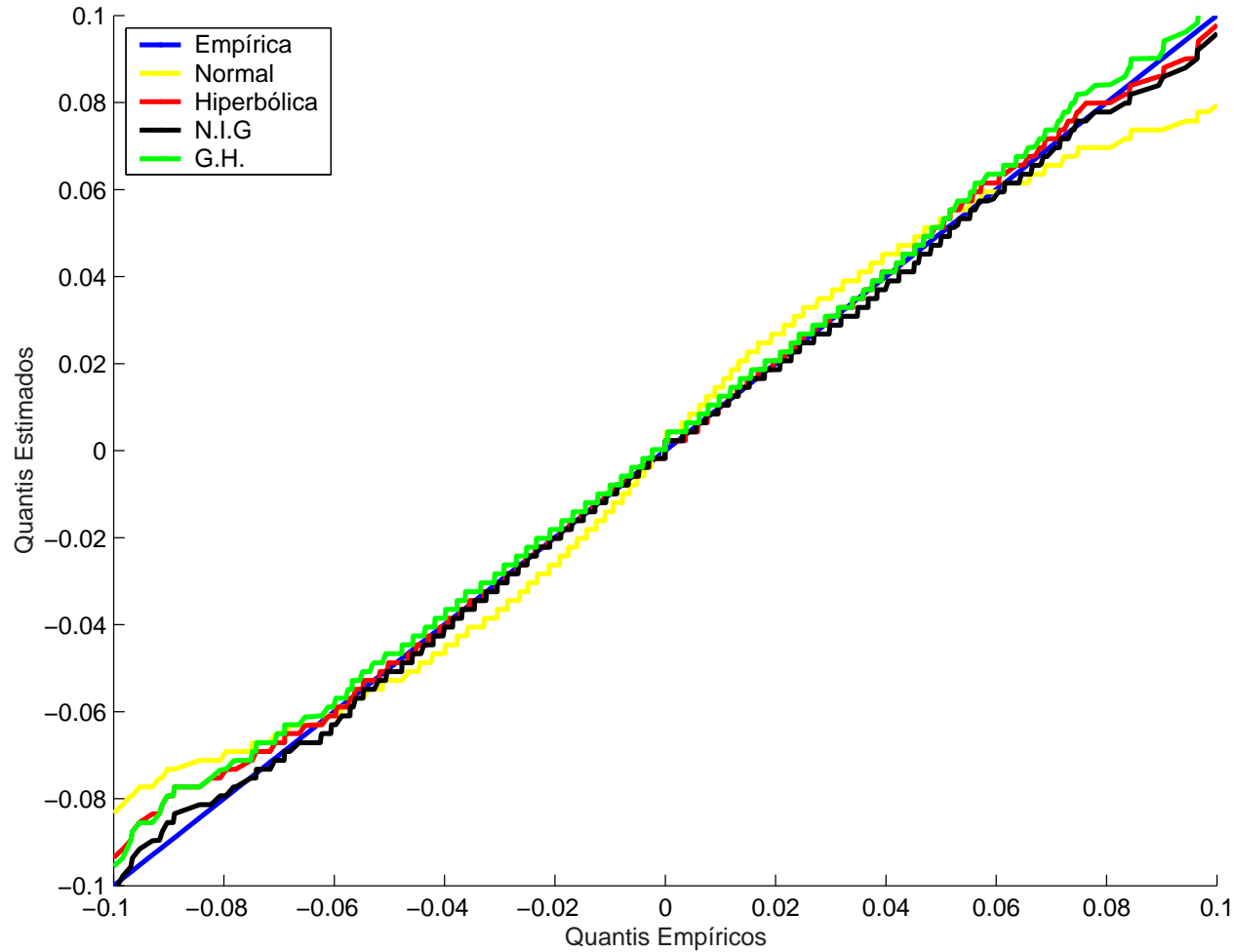


Gráfico Quantil-Quantil de Vale do Rio Doce



Testes qui-quadrado da GH

<i>Amostra</i>	<i>Estatística</i>	<i>P-Value</i>	<i>Graus de Liberdade</i>
Bbas4	23.6516	0.0876783	15
Bbdc4	34.1268	0.000902191	14
Brdt4	66.2152	2.01218E-08	21
Cmig4	21.2875	0.165019	15
Csna3	141.597	0	19
Ebtp4	13.6279	0.341022	11
Elet6	21.383	0.268148	17
Ibvsp	13.5203	0.511037	13
Itau4	32.5035	0.0819379	22
Petr4	15.3088	0.718927	18
Tcsl4	18.9641	0.162971	13
Tlpp4	22.5389	0.0840841	14
Tnep4	13.3699	0.522905	13
Tnlp4	16.5175	0.225828	12
Vale5	16.1775	0.462554	15

Distâncias de Kolmogorov

<i>Amostra</i>	<i>Normal</i>	<i>GH</i>	
	<i>Distância</i>	<i>Distância</i>	<i>P-Value</i>
Bbas4	0.058525	0.0236	0.2611
Bbdc4	0.068154	0.0279	0.1112
Brdt4	0.050496	0.0252	0.1914
Cmig4	0.055929	0.0270	0.1354
Csna3	0.074397	0.0501	0.0002
Ebtp4	0.069918	0.0234	0.7694
Elet6	0.059818	0.0103	0.9897
Ibvsp	0.066103	0.0093	0.9970
Itau4	0.068110	0.0347	0.0233
Petr4	0.064010	0.0126	0.9294
Tcsl4	0.045834	0.0253	0.6823
Tlpp4	0.078385	0.0233	0.2691
Tnep4	0.058434	0.0219	0.8342
Tnlp4	0.059726	0.0178	0.9616
Vale5	0.075137	0.0108	0.9813

Distâncias de Kuiper

<i>Amostra</i>	<i>Normal</i>	<i>GH</i>	
	<i>Distância</i>	<i>Distância</i>	<i>P-Value</i>
Bbas4	0.113272	0.0370	0.1187
Bbdc4	0.129933	0.0462	0.0109
Brdt4	0.096853	0.0414	0.0406
Cmig4	0.102196	0.0419	0.0356
Csna3	0.129854	0.1000	1 E-14
Ebtp4	0.125867	0.0393	0.6615
Elet6	0.118995	0.0188	0.9754
Ibvsp	0.130564	0.0172	0.9924
Itau4	0.116410	0.0470	0.0086
Petr4	0.122507	0.0226	0.8574
Tcsl4	0.083862	0.0424	0.5260
Tlpp4	0.154935	0.0349	0.1748
Tnep4	0.110101	0.0412	0.5768
Tnlp4	0.117741	0.0336	0.8761
Vale5	0.133215	0.0186	0.9782

Distâncias de Anderson & Darling

<i>Amostra</i>	<i>Normal</i>	<i>GH</i>
Bbas4	137028000	1.19094
Bbdc4	51579.5	0.12879
Brdt4	485.583	0.24283
Cmig4	10296	0.07197
Csna3	7.14072	0.15460
Ebtp4	118781	0.07620
Elet6	51495.5	0.08368
Ibvsp	72825.7	0.08310
Itau4	4.6648	0.07551
Petr4	67.0476	0.04054
Tcsl4	1849990	0.22114
Tlpp4	51523.5	0.05785
Tnep4	305.017	0.17429
Tnlp4	119529	0.17534
Vale5	51523.5	0.39979

Aplicações

- Apreçamento de Derivativos
 - Medida **Martingale** Equivalente
 - **Convolução** da Distribuição
- Value At Risk

Medida Martingale

- Transformada de Esscher
 - Parâmetro $\vartheta \rightarrow r = \ln \frac{M(\vartheta + 1)}{M(\vartheta)}$
 - Estimação: Downhill Simplex Method
 - Mínima Medida Martingale

Convolução

- FFT e IFFT

- Função Característica Real ($\beta = \mu = 0$)

- Transformação para a Densidade Desejada:

$$\rightarrow GH^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = \frac{e^{\beta x}}{M_0^t(\beta)} gh^{*t}(x - \mu t; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0)$$

- Normal Inversa Gaussiana:

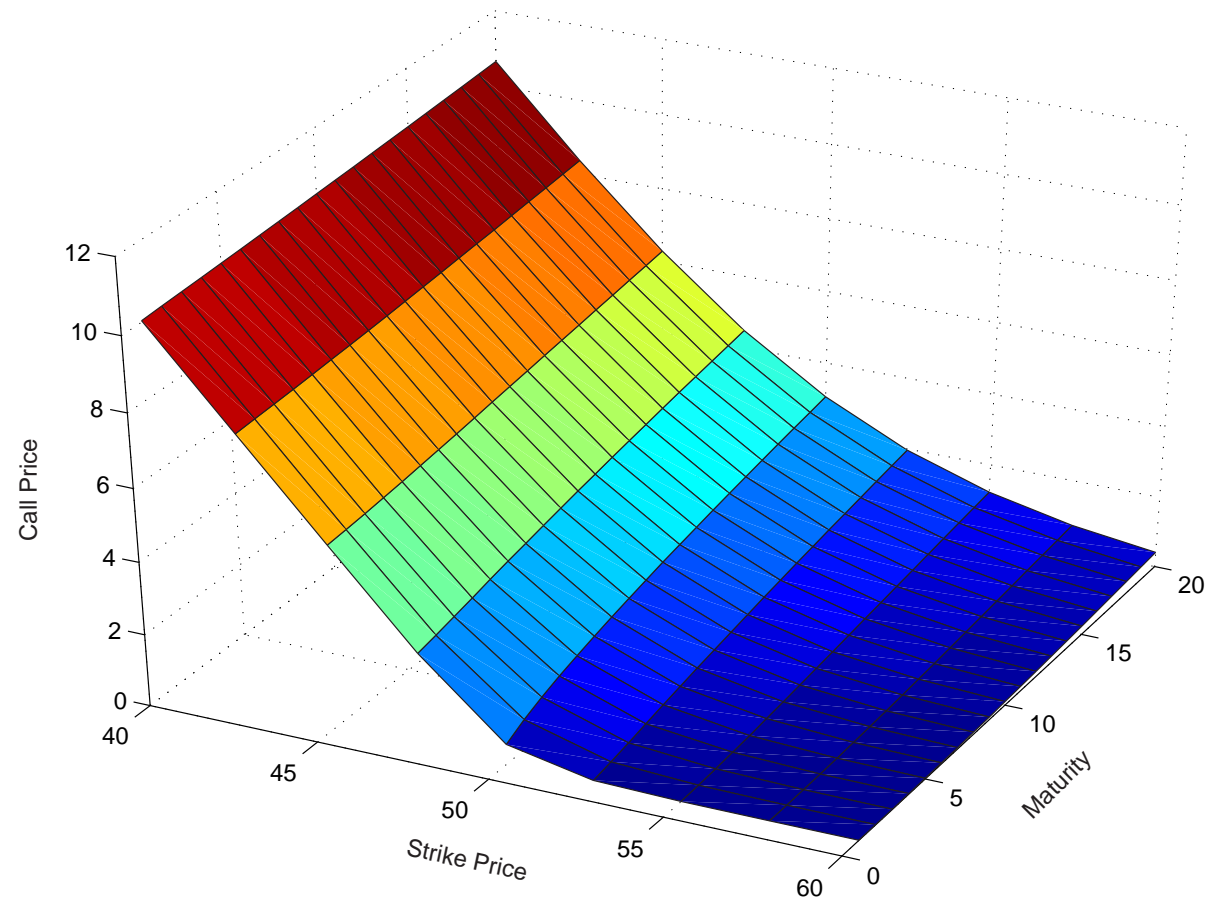
$$\rightarrow NIG^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = NIG(x; \alpha, \beta, t\delta, t\mu)$$

Aporeamento

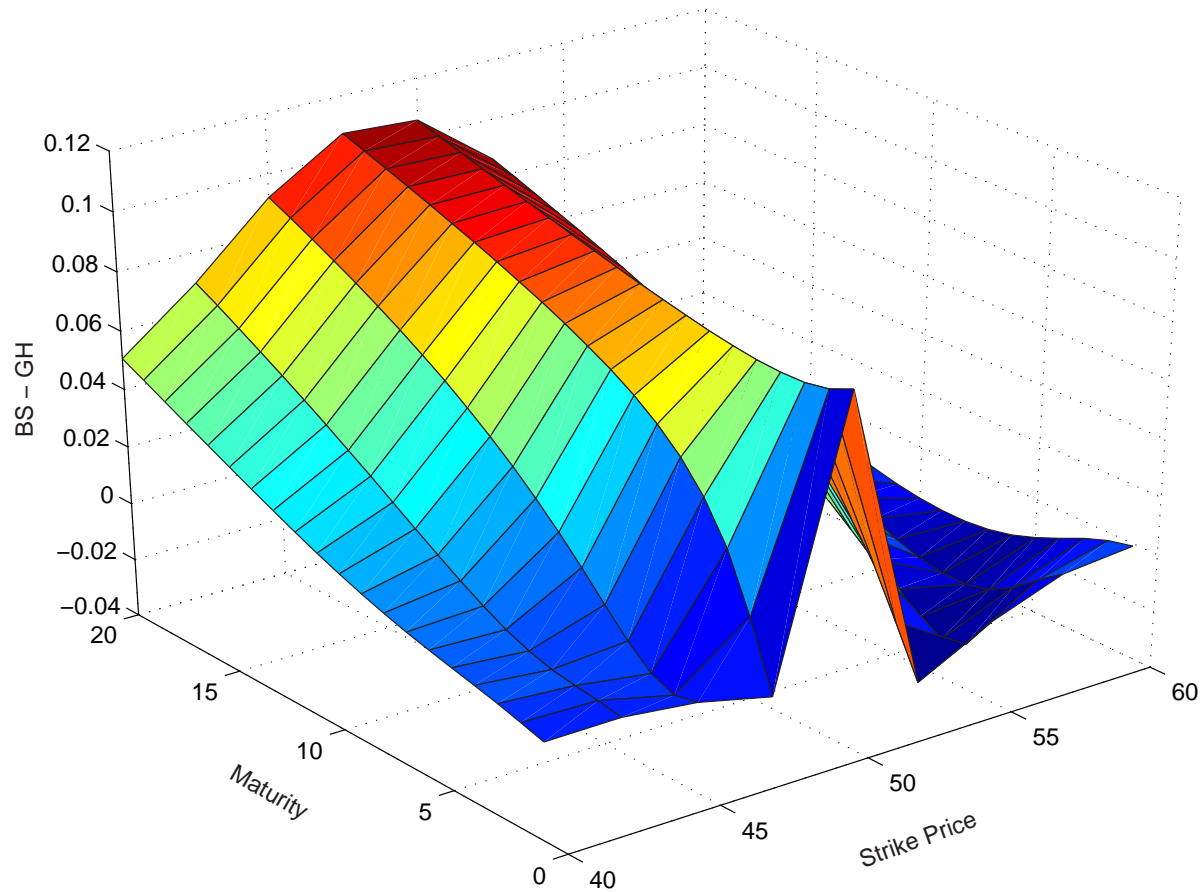
$$C_{GH} = S_0 \int_{\log \frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*t, \vartheta+1}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) dx -$$

$$e^{-rt} K \int_{\log \frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*t, \vartheta}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) dx$$

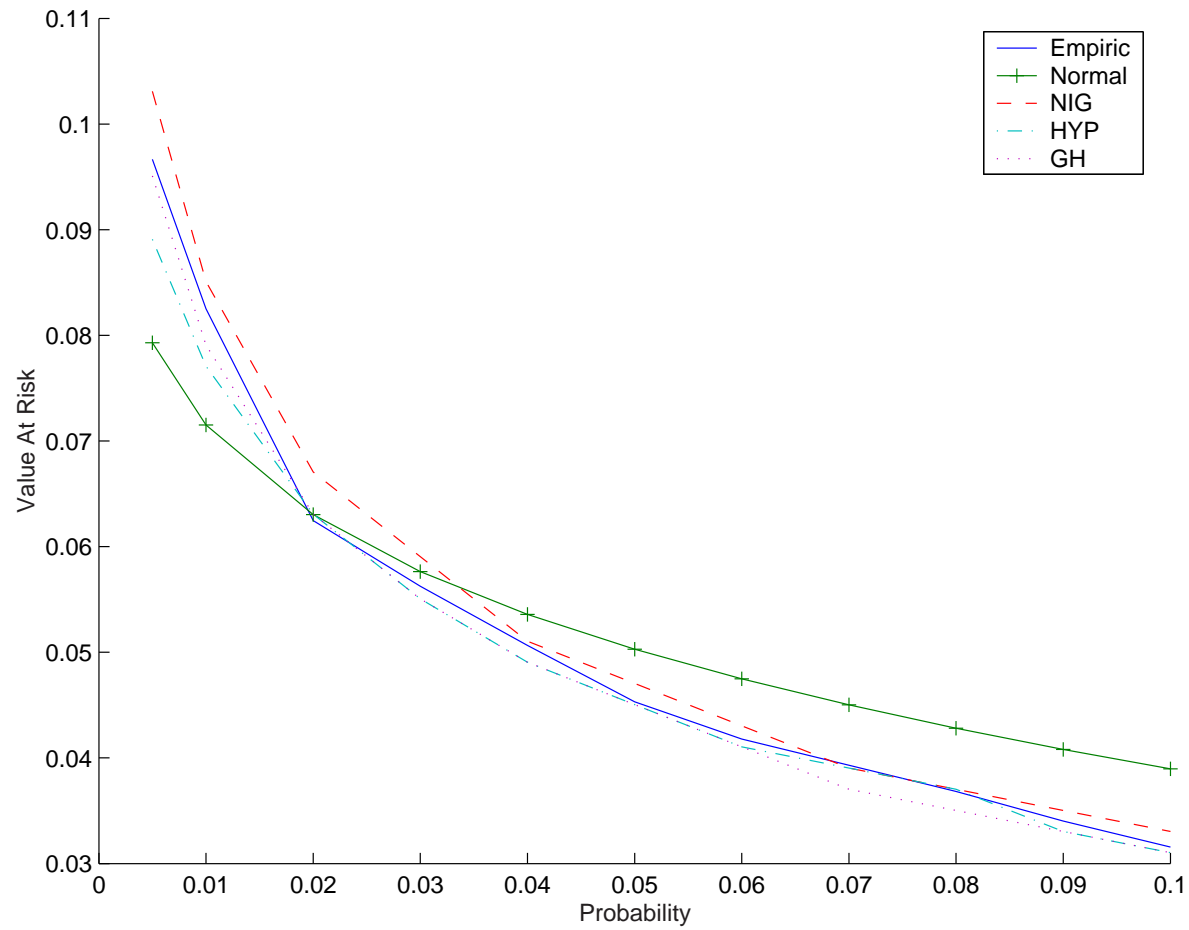
Calls(GH) - Vale do Rio Doce ($S_0=50$)



Calls(GH)x Black & Scholes - Vale do Rio Doce ($S_0=50$)



V@R - Vale do Rio Doce



V@R - Back Test

- 1590 testes fora da amostra
- Normal, Hyp, Nig, GH
- 1% de probabilidade
- 1 dia de manutenção de posições
- Teste de Kupiec

V@R - Back Test

<i>Distribuição</i>	<i>Exceções</i>	<i>Probabilidade</i>	<i>P-Value</i>
Normal	21	0.013208	0.22
Hiperbólica	17	0.010692	0.78
N.I.G.	16	0.010063	0.98
G.H.	16	0.010063	0.98

Limitações do Modelo

- Grande **esforço computacional**
- Dificuldade na avaliação de **carteiras**
- Convergência do algoritmo
- **Precisão** do cálculo numérico
- Não se ajusta a todos os dados
- Parâmetros não representam variáveis de mercado

Considerações Finais

- Boa aderência a dados de alta volatilidade
- Melhora nas medidas de risco
- Melhora no apreçamento
- Nig x Hyp x GH