Processos de Lévy em Finanças

Prf. José Fajardo Barbachan
IBMEC Business School

Evento Oppencad, 18 de Agosto de 2004

Toolbox Estatístico

- Norminv,tinv, binoinv,betainv, chi2inv
- Normcdf, normpdf,tcdf,tpdf,chi2cdf,chi2pdf, F, .
- Expcdf,exppdf,expfit,expinv
- Gamcdf,poisscdf,etc
- Normfit, tfit
- Hist(rettnlp4); histfit(rettnlp4)

Toolbox Estatístico

- Cov
- Kurtosis
- Skewness
- Mean,std

Normalidade

- qqplot(rettnlp4,retnorm)
- jbtest, kstest, lillietest,(rettnlp4,rettnlp4)

Toolbox Estatístico

- Test chi quadrado: teste de adherência,
- Se CHSQ >CHi2inv(alpha%,v) rejeita Ho: os dados empíricos se ajustam á distribuição no teste.

```
>>[chsq,prob,df] =Chtest(rettnlp4,[mean(rettnlp4),std(rettnlp4)])
>>chi2inv(0.01,47)
```

Exemplos

```
Para calcular o VaR com probabilidade 1-alpha

>> X = NORMINV(1-alpha,MU,SIGMA)

Para ajustar dados do vetor X a uma normal e
  construir intervalos de confiança ao
  100*(1-alpha)% de confiança

>> NORMFIT(X,ALPHA)
```

Toolbox Otimização

FMINCON resolve problemas da forma:

min F(X) sujeito a:

A*X <= B, Aeq*X = Beq (restrições lineare)

C(X) <= 0, Ceq(X) = 0 (restrições não lineares)

LB <= X <= UB (limites)

X=FMINCON(FUN,X0,A,B) comenza em X0e encontra o minimo X da função FUN, sujeita a desigualdade linear A*X <= B. (X é um vetor)

Toolbox Otimização

X=FMINCON(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,NONLCON)

Sujeita a minimização as restrições definidas na função NONLCON. A função NONLCON acceita Xe retorna os vetores C e Ceq, que representam as desiguldades e iguldades não lineares, respetivamente

Caso alguma restrição não exista basta definir o campo com [].

Toolbox Otimização

Exemplo: minimize a função:

3sin(x)+exp(y), com x,y>=0;

```
>X=fmincon(inline('3*sin(x(1))+exp(x(2))'),[1;1],[],[],[],[],[0 0])

  Dará

    X = [0;0]. Confirá graficamente.
```

Toolbox Finance

V=BLSIMPV(So,X,R,T,CALL,MAXITER,Q,TOL)

retorna a volatilidade implicita do ativo subjacente dado o preço corrente So, o preço de exercício X, a taxa livre de risco R, o tempo para a maturidade T, E o valor da opção call. MAXITER é o número máximo de iterações usado para encontrar V.

Exemplo

- Um ativo tem preço hoje de R$100, um preço de exercício de R$95, a taxa livre de risco é 7.5% e o tempo para a maturidade da opção é .25 anos. A opção tem um valor de mercado de $10.00. Qual é a volatilidade implicita do ativo?

```
>> blsimpv(100,95,.075,.25,10)
```

Toolbox Finance

- FRONTIER(Ativo,RET)

  Esta função gráfica a fronteira eficiente.

  Ativo é uma matriz M-por-N contendo os dados de N ativos para M datas diferentes

  RET é um vetor 1-por-N vector contendo as taxas de retorno de cada ativo.

Toolbox Finance

```
>> cd e:/Oppencad
>> load ativo
>> retativo=log(ativo(2:end,:))-
  log(ativo(1:end-1,:));
>> e=mean(retativo)
>> frontier(retativo,e)
```

Toolbox Finance

V = PORTVAR(ASSET,WS)
Retorna a variãncia da carteira formada
pelos ativos contidos em

ASSET que é uma matriz MxN com os dados dos ativos e WS é um vetor 1xN com os correspondentes pesos.

Toolbox Series Temporais

- Teste dos residuos serem I. I.D Normais

```
>>archtest(residuals , Lags , alpha)
```

Exemplo:

```
>>e=randn(1,1000);
>>archtest(e,1,0.01);
>>autocorr(e , 1 )
```

Toolbox Series Temporais

- garchfit(Spec, Series)
- Series – Vetor com as observações da variavel de interese univariada.
- Spec: é a specificação do modelo por exemplo se queremos ajustar os dados a um garch(3,2) teremos que fazer

```
>> spec = garchset('P',3,'Q',2)
```

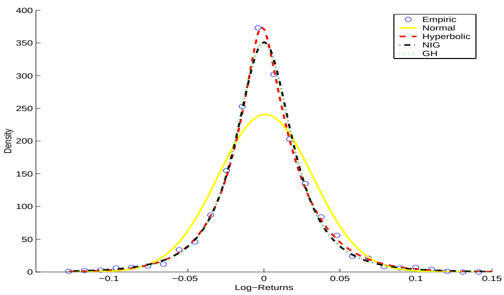
A que melhor se ajusta a dados financeiros garch(1,1)

- LBQTEST Ljung-Box Q-statistic test.

```
>>Lbqtest(rettnlp4)
```

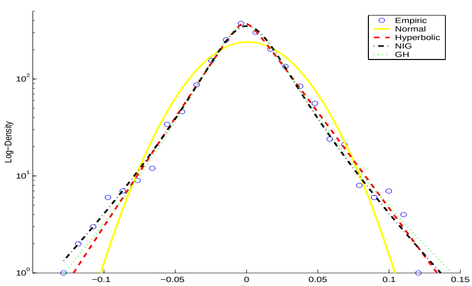
Distribuições não-Gaussianas

Vale 5



Escala Log

Vale 5



Distribuições Generalizadas Hiperbólicas

The density probability function of the one dimensional GHD is defined by the following equation:

$$gh(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,\lambda) = a(\lambda,\alpha,\beta,\delta)(\delta^2 + (x-\mu)^2)^{\frac{(\lambda-\frac{1}{2})}{2}} K(\lambda,\alpha,\delta,\mu,\beta)$$

with,

$$K(\lambda,\alpha,\delta,\mu,\beta) = K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})\exp(\beta(x-\mu))$$

where,

$$a(\lambda,\alpha,\beta,\delta) = \frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{(\lambda-\frac{1}{2})}\delta^{\lambda}K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}$$

is a norming factor to make the curve area total 1 and

$$K_{\lambda}(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^{\lambda-1} exp\left(-\frac{1}{2}x\left(y+y^{-1}\right)\right) dy$$

is the modified Bessel function[2] of third kind with index λ. The parameters domain are:

$$\mu,\lambda \in \mathbb{R}$$
$$-\alpha < \beta < \alpha$$
$$\delta,\alpha > 0.$$

Distribuições Generalizadas Hiperbólicas

Estas distribuições possuem caudas semi grossas:

$$gh(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta) \sim |\ x\ |^{\lambda-1} \exp\left((\mp\alpha+\beta)x\right) \text{ as } x \to \pm\infty$$

Dos subclasses muito utilizdas são a Hyperbolica(λ=1) e a Normal Inversa gaussiana (λ=-0.5):

$$hyp(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2\delta\alpha K_1(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})} exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}+\beta(x-\mu)\right)$$

$$nig(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)\right)\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}$$

Distribuições Generalizadas Hiperbólicas

Table 1. Sample

Asset	*Ticker*	*Start*	*End*
Banco Itaú - PN	Itau4	07/01/1994	12/13/2001
Banco do Brasil - PN	Bbas4	07/01/1994	12/13/2001
Bradesco - PN	Bbdc4	07/01/1994	12/13/2001
Cemig - PN	Cmig4	07/01/1994	12/13/2001
Cia Siderúrgica Nacional - ON	Csna3	07/01/1994	12/13/2001
Eletrobrás - PNB	Elet6	07/01/1994	12/13/2001
Embratel Participações - PN	Ebtp4	09/21/1998	12/13/2001
Ibovespa	Ibvsp	07/01/1994	12/13/2001
Petrobrás - PN	Petr4	07/01/1994	12/13/2001
Petrobrás Distribuidora - PN	Brdt4	07/04/1994	12/13/2001
Tele Celular Sul - PN	Tcsl4	09/21/1998	12/13/2001
Tele Nordeste Celular - PN	Tnep4	09/21/1998	12/13/2001
Telemar - PN	Tnlp4	09/22/1998	12/13/2001
Telesp - PN	Tlpp4	07/01/1994	12/13/2001
Vale do Rio Doce - PNA	Vale5	07/01/1994	12/13/2001

Distribuições Generalizadas Hiperbólicas

- A estimação dos parâmetros da distribuição será feita via máxima Verosimilhanças:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \log\left(gh(x_i;\alpha,\beta,\delta,\mu,\lambda)\right)$$

Isto é , encontraremos os parametro que maximizem a Função *L , n* é o tamanho da amsotra. (Minimos Quadrados?)

```
>>parametros=GHFit(Empirica,Lambda)
>>parametros=GHFit(rettnlp4,-0.5)%para NIG
>>[chsq,prob,df] =Chtest(rettnlp4,parametros)
```

Distribuições Generalizadas Hiperbólicas

Table 3. Estimated NIG parameters.

Sample	α	β	δ	μ	*LLH*
Bbas4	26.1863	3.3516	0.0356	-0.0049	3512.65
Bbdc4	25.2340	0.0027	0.0234	0	3978.71
Brdt4	36.7793	3.7894	0.0325	-0.0029	3922.97
Cmig4	27.0195	0.0008	0.0327	0.0003	3681.63
Csna3	25.3325	2.4753	0.0236	-0.0015	3949.86
Ebtp4	22.8770	3.7054	0.0424	-0.0075	1412.84
Elet6	23.6626	0.0034	0.0343	0	3532.29
Ibvsp	31.9096	-0.0035	0.0233	0.0012	4178.17
Itau4	30.7352	0.0015	0.0249	0.0008	4065.40
Petr4	25.3411	0.0009	0.0285	0.0007	3764.37
Tcsl4	24.5055	-0.0003	0.0556	0.0012	1327.02
Tlpp4	20.3812	0.0038	0.0249	0.0003	3763.65
Tnep4	21.8374	0.0013	0.0519	0.0012	1317.41
Tnlp4	26.2133	0.0010	0.0384	0.0004	1505.29
Vale5	26.6233	0.0048	0.0249	0	3956.39

Teste de Adherencia

```
>>par=GHFit(rettnlp4,-0.5)%para NIG
>>parametro= [par.Alfa, par.Beta, par.Delta, par.Mu,par.Lambda],
>>[STA,P,DF]=ChTest(rettnlp4,parametro,20)
>>c=chi2inv(0.05,19)



>>distancias.m
```

VaR

- Quando estamos usando value-at-risk (VaR), o administrador de uma carteira de instrumentos financeiros esta interesado em fazer uma afirmação da seguinte forma:

"*Estamos* ***α*** *nível de certeza que não vamos perder mas do que* ***V*** *reais nos próximos* ***N*** *días*"

A variável V é o VaR da carteira , isto é função de dois parâmetros: N o horizonte de tempo e α o nível de confianza.

Introdução

- Na pratica analistas escolhem $N=1$, devido a que não existem suficentes dados para fazer uma boa estimativa para períodos maiores.
- A hipoteses usual é:

VaR para N dias = VaR de 1 día* (N)^1/2

Isto é verdadeiro quando as mudanças consecutivas na carteira são independentes e identicamente Normais.

Simulação Historica

- Crie uma base de dados diaria de todas as varíaveis de mercado que afetam a carteira.
- O primer cenário suponhe que as mudanças em todas a varíaveis de mercado para amanha serão como aconteceu no primeiro día da base de dados
- O segundo cenário suponhe que as mudanças em todas a varíaveis de mercado para amanha serão como aconteceu no segundo día da base de dados
- E assim sucessivamente..

Simulação Historica

- Suponha que temos m dias na base de dados
- Seja v_i o valor da varíavel de mercado no día i
- Existirão m-1 possíveis cenários
- O i-esimo cenário suponhe que o valor da variável de mercado amanha (i.e., no día m+1) é :

$$v_m \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

Simulação Historica

- Em cada possível cenário calculamos a variação do valor da carteira.
- Agora rankeamos esta variações é a que esteja no 0.01m pior lugar será o VaR de 1 día a 99% de certeza.
- Exem: se m=500, o VaR1día a 99% será o pior 5to lugar. Das possiveís variações.
- Apartir daqui a gente a cada día faz uma janela movil de 500 días é faz o recalculo do VaR.
- Ver *hsvar.m*

Bootstraping com carteiras

Para calcular VaR temos que:

- Encontrar o valor da carteira hoje
- Fazer uma amostragem usando um sorteio aleatorio dos proximos δx_i .
- Reavaliar a carteira no fim

Bootstraping com carteiras

- Calcular a variação da carteira δP
- Fazer esta amsotragem varias vezes ate´construir uma distribuição de probabilidade para δP
- E o VaR será determinado da seguinte forma:
- Se por exemplo fazemos 1,000 simulações

Bootstraping com carteiras

- Fazer noMatlab

>>bootstrapvar(rettnlp4,1000,0.99)

Método Variância-Covariância

- Imagine que temos uma carteira com 2 ativos , com volatilidades diarias de 1% e 2%, a correlação é 0.7, e os pesos são 2/3 e 1/3. Assumindo que o valor da carteira seja 10 milhões. Encontrar o VaR com um horizonte de tempo de 10 dias.

Método Variância-Covariância

```
>>format bank
>>s1=0.02*sqrt(10);
>>s2=0.01*sqrt(10);
>>Covc=[s1^2 0.7*s1*s2;0.7*s1*s2 s2^2];
>>s=PortStats([0 0],covc,[2/3 1/3]);
>>VaR=portvrisk(0,s,0.01,10^7)
```

Replicar para outros ativos

Stress Testing

- Esto requer testar quão bom seria o comportamento de uma carteira baixo os movimento mas extremos observados no mercado durante os ultimos 10 a 20 anos

Back Testing

- Este processo é muito importante, ele involve testar quaõ boa foi a performance do vaR no pasado.
- Suponha qiue estamos calculando o VaR de 1dia ao 99%. O BackTesting resulta em observar quantas vezes uma perda num día excedeu o VaR de 99% calculado para esse dia. Se isto acontece cerca de 1% dos días , podemos sentirnos seguros com a metodologia usada para calcular VaR.
- E se acontece por exemplo 7% devemos ficar muito desconficados se a metodologia usada é adequada.

Backtesting

```
>>kupiecbacktest(rettnlp4,0.0559,0.99)
```

Outros Backtestings

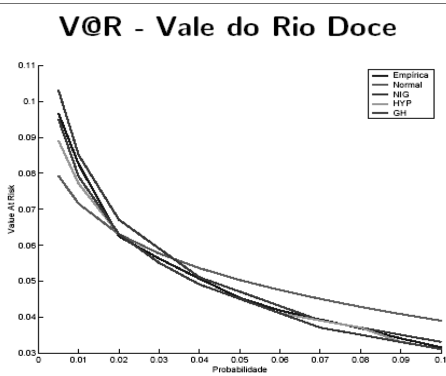
- Lopezbacktest.m
- Blancoilhebacktest.m

- Frechetvar.m
- Tvar.m

>>tvar(mean(rettnlp4),std(rettnlp4),5,0.99,1)

- BacktestingGH.m

VaR - GH



Volatilidade Estócastica

- Como vimos anteriormente precisamos estimar a volatilidade para obter o VaR, uma forma de estimar esta volatilidade é:
- Defina σ_n como a volatilidade diaria entre os dias *n*-1 e o dia *n,* estimada no fim do dia *n*-1
- Defina S_i como o valor da variável de mercado no fim do día *i*
- Defina $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$ e

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2$$

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}$$

Volatilidade Estócastica

Uma simplificação usual no calculo do VaR é:

- Defina u_i como $(S_i\text{-}S_{i\text{-}1})/S_{i\text{-}1}$
- Assuma que a média de u_i é zero
- Reemplaze m-1 por m

Isto dá $$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2$$

Volatilidade com Ponderações

Agora no lugar de asinar pesos iguais às observações podemos fazer o seguinte:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2$$

onde

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Modelo ARCH(m)

Num modelo ARCH(m) tambem asinamos algum peso a taxa da variancia de longo prazo, V_L:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2$$

where

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Modelo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

- Este modelo é um caso particular do modelo com ponderações, onde os pesos decaem exponencialmente quando nos movemos ensentido contrario ao tempo.
- Isto é tomando *m* suficentemente grande e $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$

Temos

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

Isto é a volatilidade dependerá da estimativa feita no dia anterior e a mudança mas recente no retorno da variavel de mercado *u*.

Exemplo: EWMA

- Suponha que λ=0.90 , e que a volatilidade estimada para o día n-1 seja 1% por dia e durantre o dia n-1 a variavel de mercado tenha aumentado um 2%.
- Isto significa que σ_{n-1}^2 =0.01^2=0.0001 e u_{n-1}^2 =0.02^2=0.0004, daqui:

σ_n^2 = 0.90x0.0001+0.10x0.0004=0.00013

Ou seja σ_n é 1,14% por dia.

O sistema RiskMetrics desenvolvido pela J.P.Morgan disponibilizado em 1994, usa λ=0.94, para fazer o update das estimativas de volatilidade.

GARCH(1,1)

No modelo GARCH (1,1) assinamos algum peso taxa da variancia de longo prazo, V_L:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

Como os pesos soman 1:

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

GARCH(1,1)

Fazendo $\omega = \gamma V$, O modelo GARCH (1,1) é:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

E

$$V_L = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$$

Exemplo

- Suponha

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13u_{n-1}^2 + 0.86\sigma_{n-1}^2$$

- A taxa de variancia de longo prazo é 0.0002 daqui a taxa de volatilidade diaria de longo prazo é 1.4%

Exemplo

- Suponha que a estimativa atual para a volatilidade seja 1.6% por dia e o percemtagem de mudança na variável de mercvado atual seja 1%.
- A nova taxa de variância será

E a nova volatilidade é 1.53% por día

$$0.000002 + 0.13 \times 0.0001 + 0.86 \times 0.000256 = 0.00023336$$

Ver toolbox GARCH Matlab

Toolbox GARCH

- GARCH(1,1)

$$y_t = C + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \kappa + G_1\sigma_{t-1}^2 + A_1\varepsilon_{t-1}^2$$

- GARCH(p,q)

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^{P} G_i\sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} A_j\varepsilon_{t-j}^2$$

GARCH(1,1)

```
>>spec = garchset('P',1,'Q',1);
>> garchfit(spec,rettnlp4)
```

Opções

- EssherEst.m, Momento.m

```
>>par=GHFit(rettnlp4,-0.5)%para NIG
>>parametro= [par.Alfa, par.Beta, par.Delta,
   par.Mu,par.Lambda, 0.16];
>> EscherEst(0.2,parametro)
>>v=fminsearch('EscherEst(x,[99.4587,-
   0.0005,0.0543,0.0013,-0.5000,0.1600])',1)
```

- Convolucao.m
- InvFourier.m

Opções

- NigCallEssher.m

>>NigCallEsscher(34,0.16, 99.4587,-0.0005,0.0543,0.0013,-0.5000,38,38.59,4096,0.2)

>>Blsprecoc(38.59,38,0.16,34/365,0.37)

Opção da Vale

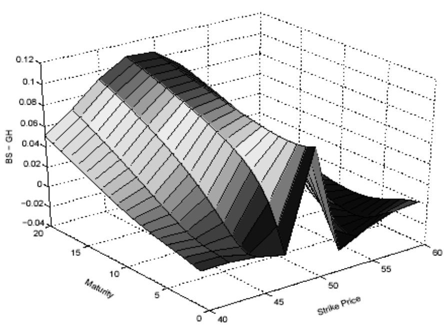


Fig. 4. Black and Scholes minus GHD Vale do Rio Doce Call prices for various maturities and strike prices.

Bibliográfia

- http://professores.ibmecrj.br/pepe