

# Processos de Lévy em Finanças: Modelos e Implementação Numérica

Professor: José Fajardo Barbachan

As distribuições log-Normais usadas nos modelos de Black et Scholes (1973) e Merton (1973), para modelar os preços dos ativos financeiros, não capturam corretamente o comportamento dos dados reais, a partir destes modelos varios outros têm sido desenvolvidos. Entre estes modelos temos os que usam processos de Lévy para modelar os retornos dos ativos financeiros, estes processos têm-se mostrado muito adequados, pois capturam varios dos fatos estilizados observados nas series financeiras. Por este motivo tais processos tornaram-se importantes ferramentas, tanto do ponto de vista acadêmico quanto prático. Já que com estes processos podemos obter preços corretos e calcular melhor os riscos associados às diversas posições das instituições financeiras.

Do ponto de vista matemático, os modelos de Lévy requerem técnicas que, muitas vezes, não recebem a atenção necessária nos cursos de graduação, ou mesmo pós-graduação. Além da própria matemática, estes modelos envolvem, também, a parte computacional, o que gera um *trade-off* entre a complexidade matemática, que torna o modelo mais realista e a implementação numérica, que pode demandar muito esforço computacional.

Este curso tem por objetivo apresentar desde a parte teórico-matemática até a implementação computacional dos modelos com processos de Lévy em finanças.

## 1. Revisão de Processos Estocásticos

- a) Processos de Markov e IID
- b) Movimento Browniano.
- c) Martingalas e Semimartingalas.
- d) Funções característica

2. Modelo de Black et Scholes
  - a) Formula de Itô
  - b) Teorema de Girsanov
  - c) Medida Martingala Equivalente.
  - d) Formula de Black e Scholes.
3. Extensões do Modelo de Black et Scholes
  - a) Modelo de Merton: Jumps
  - b) Processos Ornstein-Ühlenbeck
  - c) Modelos de Stein & Stein e Heston: Volatilidade estocástica.
4. Processos de Lévy
  - a) Por que usar-os? Evidência empírica.
  - b) Formula de Lévy-Khinchine
  - c) Medidas de Lévy finitas e infinitas.
  - d) Processos Estáveis
5. Modelos com Processos de Lévy.
  - a) Modelo VG.
  - b) Modelo Generalizado Hiperbólico.
  - c) Funções Caraterística, Medidas de Lévy e estatísticas relevantes.
6. Derivativos e VaR com Processos de Lévy.
  - a) Teorema Fundamental do Asset Pricing.
  - b) Construção da medida martingala equivalente.
  - c) Apreçamento de opções.
  - d) Calculo de VaR
  - e) Implementação Numérica.
7. Estrutura a Termo com Processos de Lévy.
  - a) Apreçamento de opções de juros
  - b) Implementação Numérica.
8. Derivativos com Processos de Lévy Multidimensionais.

## Referências

- [1] BERTOIN J., (1996) *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] BLACK, F. and M. SCHOLES (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637-654.
- [3] EBERLEIN, E., AND PRAUSE, K. (1998): “The Generalized Hyperbolic Model: Financial Derivatives and Risk Measures”. Universität Freiburg i. Br. Preprint 56, November.
- [4] FAJARDO, J. and A. R. FARIAS (2002), “Generalized Hyperbolic Distributions and Brazilian Data”, Working Paper Series N° 52, Banco Central do Brasil.
- [5] FAJARDO, J. and MORDECKI, E. (2003), “Duality and Derivative Pricing with Lévy Processes”, Preprint N° 2003/76, CMAT - Universidad e la República del Uruguay.
- [6] FAJARDO, J. and ORNELAS, J. R. H. (2003), “Apreçamento de Opções de IDI Usando o Modelo CIR”, *Estudos Econômicos* 33 (2), 287-323.
- [7] FAJARDO, J. and ORNELAS, J. R. H. (2003), “Apreçamento de Opções de IDI Usando distribuições Hiperbólicas Generalizadas”, *Economia Aplicada* 7 (4), 767-794.
- [8] FAJARDO, J., A. SCHUSCHNY and A. SILVA (2001), “Lévy Processes and The Brazilian Market ”, *Brazilian Review of Econometrics*, 21, No. 2, 263-289.
- [9] GERBER, H. U., and E. S. W. SHIU, (1994): “Option Pricing by Esscher-transform”, *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. 46, 99-191.
- [10] MERTON, R.C. (1973): “ Theory of rational option pricing”, *Bell J. Econom. Manag. Sci.* 4, 141–183.
- [11] MERTON, R.C. (1976): “Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous,” *J. of Financial Economics*, 3, 125–144.

- [12] SATO, KEN-ITI. (1999): *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 68. Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] SHIRYAEV, A.N.(1999), *Essential of Stochastic Finance: Facts, Models and Theory*. World Scientific Pub. Co.