Equilíbrio en Economias Estócasticas *

José Fajardo

IBMEC Business School

Av. Rio Branco 108, Rio de Janeiro, Brasil.

pepe@ibmecrj.br

March 21, 2006

Resumén

En este trabajo mostramos como se pueden extender los resultados clásicos de existencia de equilibrio en economías con mercados incompletos en tiempo discreto para economías en tiempo continuo.

Palabras llave: Agente Representativo; Mercados Incompletos, Economía Estocástica.

1 Introducción

Los primeros modelos de equilibrio general son debidos a Walras (1874) y Pareto (1896). Otros modelos más abstractos y axiomáticos fueron desarrollados por Arrow (1951), Debreu (1952) y McKenzie (1955). Básicamente, estos modelos discutían la existencia de los equilibrios, su determinanción y su optimalidad. Para tal efecto dos axiomas fueron utilizados: el primero nos dice que todos los agentes son racionalmente limitados, pues tiempo y

*Agradezco al CNPq de Brazil por todo su apoio financiero y a los profesores Ramón García-Cobián y Uldarico Malaspina por haberme mostrado los caminos de la Economia Matemática.

esfuerzo son necesarios para obtener y procesar toda la información, para crear todos los posibles escenarios futuros y hacer los cálculos que permitan resolver los problemas de decisión. El segundo nos dice que todos los agentes actúan por interés propio. Para lidar con estas limitaciones varias teorías han sido desarrolladas como por ejemplo: la teoría de Asimetría de Información, la teoría de Contratos Incompletos y la teoría de Juegos.

Las demás hipótesis del modelo de Arrow-Debreu consideran que en la Economía la incertidumbre es exógena y que los mercados son completos, esto significa que todas las incertidumbres futuras pueden ser cubiertas usando contratos disponibles en el mercado financiero. Además de esto, no hay fricciones en la economía, es decir no hay costos de transacción, ni restricciones en las ventas al descubierto, y los agentes cumplen con sus promesas futuras, es decir no existe inadimplencia. Estas hipótesis implican que otros costos no son incluidos, como por ejemplo los costos de tiempo y esfuerzo para buscar los contratos y detallarlos, tampoco existen costos legales por incumplimiento de los contratos. Cuando se trata de un modelo con mas de dos períodos es necesario hacer suposiciones sobre la función de descuento usada para traer los valores a valor presente. En los modelos clásicos se supone que la función es de tipo exponencial.

Es claro que estas hipótesis son irrealistas, más cumplieron un papel muy importante en los inicios, pues permitieron simplificar y entender que era posible desarrollar modelos que explicasen el comportamiento de los agentes económicos. A partir de estos modelos muchas extensiones fueron realizadas. Como por ejemplo los modelos consideran altruismo, que permite que los agentes consideren en su problema de maximización las utilidades de los demás agentes. Como en los modelos en los cuales los padres se preocupan con los hijos. En los modelos más recientes varios debilitamientos de las hipótesis han sido realizados, se han incluido diversos tipos de fricciones y como consecuencia varias costos han aparecido de forma natural. A incompletitud del mercado también ha sido considerada.

Mas recientemente una área llamada *Economía Comportamental*, a querido humanizar mas los modelos, llevando en consideración aspectos psicológicos de los agentes. Como por ejemplo el hecho de que varios experimentos han mostrado que los agentes no realizan descuentos exponenciales, ellos aplican tasas de descuento altas en períodos cortos y tasas de descuento bajas en períodos largos de tiempo. A este tipo de descuento se ha llamado *Descuento Hiperbólico*. El problema del consumo y la inversión óptima, en ese contexto, fue analizado por Laibson (1997, 1998).

Otra línea de extensión ha sido considerar economías en tiempo continuo. En este sentido los primeros modelos que estudian los problemas de equilibrio dinámico en economías estocásticas con mercados completos son debidos a Huang (1987), Dumas (1989) y Karatzas, Lehoczky & Shreve (1990), mientras que Cox, Ingersoll & Ross (1985) estudiaron el caso incompleto.

En el caso de mercados completos se construye un agente representativo que tiene una utilidad construida como una combinación lineal de las funciones de utilidad individuales usando pesos constantes. Cuando el mercado es completo o la alocación de equilibrio es Pareto-Eficiente, Negishi (1960), Constantinides (1982) e Huang (1987) mostraron que este tipo de agregación es posible.

Cuando los mercados son incompletos Cuoco y He (1994) probaron que en una economía con dos agentes esta agregación también es posible y la utilidad del agente representativo es dada endogenamente. Ellos construyeron esta utilidad como una combinación lineal de las funciones de utilidad individual, pero usando pesos representados por procesos estocásticos. Ellos transformaron el problema de equilibrio en una caracterización del proceso de pesos. De aquí las políticas óptimas pueden ser obtenidas[1]. Por último Fajardo (2002) mostró que esta agregación también puede ser realizada cuando existen más de dos agentes en la economía.

El trabajo esta organizado de la siguiente forma: in la Sección 2 presentamos la economía estocástica; en la Sección 3 presentamos el problema del consumo y definimos el equilibrio de expectativas racionales. En la Sección 4 caracterizamos las políticas optimas y en la Sección 5 presentamos los principales resultados; en la Sección 6 analizamos la existencia de equilibrios . En las últimas secciones tenemos las conclusiones y un apéndice.

[1]El problema de encontrar as políticas óptimas en mercados incompletos puede ser muy difícil cuando se consideran procesos de precios más realistas y complejos veja Fajardo (2000) y Fajardo (2003)

2 La Economía

Consideramos una economía a tiempo continuo en el intervalo $[0, T]$, con $T < \infty$, existe un único bien de consumo perecible (numerario) y un mercado financiero $\mathfrak{M}$ que consiste de $n+1$ activos. O primero será llamado de *Bono* (activo sin riesgo) y los n restantes serán llamados de *stocks* (activos con riesgo). El precio del Bono y los precios de los stocks serán denotados por $B(t)$ y $P_i(t)$ $(1 \leq i \leq n)$, respectivamente. Las ecuaciones que determinan la evolución de los precios de los activos son:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1. \tag{1}$$

$$dP_i(t) = P_i(t)[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j(t)], \quad P_i(0) \in (0, \infty). \forall i = 1, .., n \tag{2}$$

Estos dos procesos están denominados en unidades del bien de consumo. En esta economía los recursos de riesgo son modelados por las componentes independientes del Movimiento Browniano $d-$dimensional

$$W(t) = (W_1, ..., W_d)', 0 \leq t \leq T.$$

Donde cada W_i es un Movimiento Browniano[2]. Con esta interpretación σ_{ij} modela la intensidad instantánea con la cual el recurso de riesgo j (imagine por ejemplo el clima) influencia el precio del stock $i-$ésimo en el instante de tiempo t. El Movimiento Browniano W es definido en un espacio de probabilidad completo dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; denotaremos por $\mathbf{F}=\{(t), 0 \leq t \leq T\}$ la $-$aumentación[3] de la filtración natural generada por W :

$$\mathcal{F}_W(t) = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t), \;\; 0 \leq t \leq T.$$

El proceso de *tasa de interés* es denotado por $\{r(t) : 0 \leq t \leq T\}$, el proceso vectorial de *tazas de apreciación* denotado por $\{b(t) = (b_1(t), ..., b_n(t))', 0 \leq t \leq T\}$, el proceso matricial de *volatilidades* denotado por

$$\sigma(t) = \{(\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}, 0 \leq t \leq T\}$$

[2] ver Apéndice

[3] A Filtración Browniana aumentada $\mathbf{F}$ es definida por $\mathcal{F}(t) = \sigma(\mathcal{F}_w(t) \cup \mathcal{N})$, donde $\mathcal{N} = \{E \subset \Omega : \exists G \in \mathcal{F}$ con $E \subseteq G, (G) = 0\}$ denota el conjunto de eventos $\mathbf{P}$-nulos. Es sabido que la filtración aumentada es continua y W es todavía un Movimiento Browniano con respecto a ella (Karatzas & Shreve (1988), Corolario 2.7.8 y Proposición 2.7.9).

serán referidos como los *coeficientes* del mercado financiero $\mathfrak{M}$. Asumiremos que estos procesos son progresivamente medibles[4] con relación a $\mathbf{F}$ y ellos satisfacen la siguiente relación:

$$\int_0^T \left(|r(t)| + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|^2\right) dt < \infty,$$

con $\|\cdot\|$ siendo la norma Euclidiana.

O requerimiento de que $r(t), b(t)$ y $\sigma(t)$ sean progresivamente medibles con relación a $\mathbf{F}$**,** esencialmente los hace funcionales del camino Browniano $\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ hasta el instante t, $\forall t \in [0, T]$. Esta hipótesis evita anticipación del futuro, y permite dependencia con el pasado del Movimiento Browniano subyacente, o de los precios de los stock.

Ahora, será que este modelo de precios es aceptable?. Una implicación seria que los retornos de estos precios $\ln(P_t/P_{t-1})$ tienen una distribución Normal. Es sabido que los datos reales de varios activos no cumplen esta hipótesis. Para ver esto utilicemos el Índice de Bolsa General de Lima (IBGL), escojamos una muestra de dos años y construyamos el histograma de los retornos:

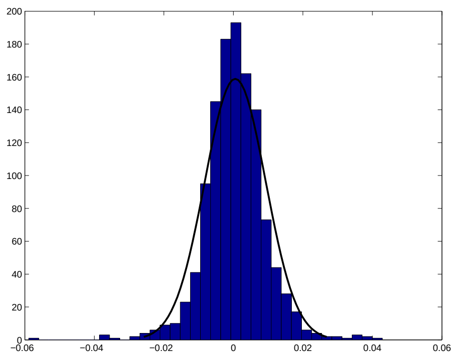

Fig. 1 Histograma de Retornos IGBVL y a distribución Normal que tiene la misma media e variancia.

[4] Ver Apéndice.

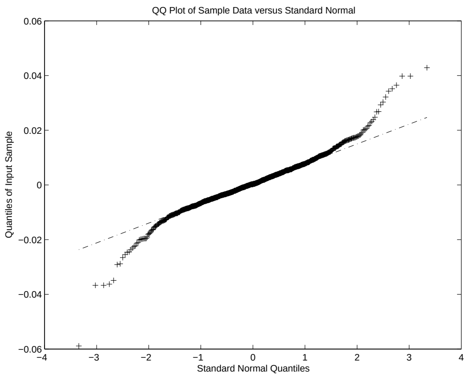

Fig. 2 Quantil-Quantil IGBVL

Esta claro que los retornos son mas leptocurticos que la distribución normal, esto también puede ser visto en el gráfico quantil-quantil. Pero, este modelo de precios es usado por varios autores, pues permite muchas simplificaciones.

Ahora en esta economía todos los agentes tienen la misma información representada por $\mathbf{F}_t$ tienen las mismas creencias representadas por $\mathbf{P}$. Estos agentes son considerados pequeños inversores (sus decisiones no afectan los precios del mercado) y cada un de ellos va a decidir a cada momento $t \in [0,T]$:

1. Cuanto dinero (α, θ) el quiere invertir. Donde $\alpha(t)$ y $\theta(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_n(t))'$ denotan el número de unidades de Bonos y stocks, respectivamente.

2. Cual deberá ser su consumo acumulado $C(t)$.

Claro esta, estas decisiones son tomadas de forma no-anticipativa, luego C y (α, θ) serán procesos adaptados [5]. Para saber las posibles decisiones de los agentes, caractericemos el conjunto de consumo $\mathcal{C}$ por el conjunto de procesos taza de consumo adaptados c con $\int_0^t (|c(s)|ds) < \infty$ para todo $t \in [0,T]$. Los conjuntos de consumo individuales serán subconjuntos del

[5]Decimos que un proceso $\{X_t\}$ es adaptado con respecto a $\mathbf{F}$ si para todo $t \in [0,T]$, X_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$-medible.

ortante no-negativo $\mathcal{C}_+ = \{c \in \mathcal{C} : c(t) \geq 0 \ \forall t\}$. En los procesos de precios de los activos, σ s exógenamente dado, el proceso tasa de interés y el vector $n-$dimensional de tasas de apreciación serán determinadas endogenamente en equilibrio. Para evitar la presencia de activos redundantes, i.e. pueden ser replicados por activos más básicos, hagamos la siguiente hipótesis

Hipótesis 1. *La matriz difusión $\sigma(t, w)$ es continua en su primer argumento y tiene rango fila total para casi todo $t \in [0, T]$.*

Ahora una estrategia de negocio admisible para este inversionista debe satisfacer para todo $t \in [0, T]$ la siguiente ecuación

$$\int_0^t \left(|\alpha(s)r(s)| + \|\theta'(s)b(s)\| + |\theta'(s)\sigma(s)|^2 \right) ds < \infty.$$

El conjunto de estrategias admisibles será denotado por Θ. Consideramos que en nuestra economía existirán un número finito $K \geq 2$ de inversionistas. La preferencia de cada inversionista es caracterizada por la función de utilidad aditiva en el tiempo e independiente de los estados.

$$U_k(c) = E\left[\int_0^T u_k(c(t), t)dt\right], k \in \{1, .., K\}$$

Para resolver el problema de la maximización de la utilidad esperada del consumo, consideraremos que para todo agente k el conjunto $\mathcal{C}_k$ de procesos de consumo satisfaz

$$E\left[\int_0^T u_k(c(t), t)^- dt\right] < \infty.$$

Donde $x^- = max(0, -x)$ y para resolver el problema de optimización individual necesitamos imponer propiedades de suavidad en las preferencias, como la siguiente

Hipótesis 2. *Las funciones $u_i(\cdot, t)$ son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas y tres veces continuamente diferenciables en $(0, \infty)$ para todo $t \in [0, T]$. Mas aún, estas funciones satisfacen la condición de Inada*

$$\lim_{x \downarrow 0} u_{kc}(c, t) = \infty \quad and \quad \lim_{x \to \infty} u_{kc}(c, t) = 0, \tag{3}$$

y existen constantes $\delta_k \in (0,1)$ *y* $\gamma_k \in (0,\infty)$ *tales que*

$$\delta_k u_{kc}(c,t) \geq u_{kc}(\gamma_k c, t) \quad \forall (c,t) \in (0.\infty) \times [0,T] \tag{4}$$

Finalmente, $u_k(c,\cdot)$ *es continuamente diferenciable en* $[0,T]$ *con*

$$\int_0^T |u_i(c,t)|dt < \infty \tag{5}$$

para todo $c \in (0,\infty)$.

La condición (3) implica que la función derivada $u_{kc}(\cdot,t)$ tiene una inversa continua y estrictamente decreciente $f_k(\cdot,t)$ mapeando $(0,\infty)$ en si mismo. La condición (4) es técnica y será usada para garantizar que cierta funcional integral puede ser diferenciada dentro de la integral. Es fácil comprobar que funciones utilidad del tipo $u(c,t) = \varrho(t)log(c)$ y $u(c,t) = \varrho(t)\frac{c^{1-b}}{1-b}$ con $b > 0, b \neq 1$ satisfacen esta condición.

Cada inversionista k esta dotado con un proceso ingreso $e_k \in \mathcal{C}_+$, con $e_k \neq 0$. Denotemos *el proceso ingreso agregado* por "e ", *i.e.*

$$e = \sum_{k=1}^{K} e_k,$$

Tenemos la siguiente

Hipótesis 3. *El proceso "e" es un proceso de Ito,*

$$de(t) = \mu(t)dt + \rho(t)dW_t,$$

para algunas funciones continuas, adaptadas y limitadas μ, ρ. *Mas aún, existen constantes* $0 < e' \leq e''$ *tales que*

$$e' \leq e(t) \leq e'' \;\; \forall t \in [0,T], \tag{6}$$

En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \sigma, \{u_k, e_k\}_{k=1}^K)$ las primitivas de la economía descrita anteriormente, y por $\mathcal{P} = (r,b)$ los parámetros que definen los procesos de precios de los activos. Nos referiremos a $\mathcal{E}$ como *la Economía* y a $\mathcal{P}$ como *el sistema de precios.*

3 Consumo Individual

Dado el sistema de precios $\mathcal{P}$ cada inversionista k escoge su proceso de consumo $c_k \in \mathcal{C}_k$ y una estrategia admisible $(\alpha_k, \theta_k) \in \Theta$, tal que $\alpha_k(0) = 0,\ \theta_k(0) = 0$,

$$X_k(t) \equiv \alpha_k(t)B(t)+\theta_k' P(t) = \int_0^t \alpha_k(s)dB(s)+\int_0^t \theta_k'(s)dP(s)-\int_0^t (c_k(s)-e_k(s))ds \tag{7}$$

$$X_k(t) \geq -\mathcal{K}B(t) \tag{8}$$

$$X_k(T) \geq 0 \tag{9}$$

para toda $t \in [0,T]$ y algún $\mathcal{K} \in I\!R_+$, donde $\{X_k(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ denota el proceso riqueza. La ecuación (7) es la bien conocida *Restricción presupuestaria dinámica*: riqueza actual es igual a los gaños de los negocios, mas el ingreso acumulado, menos el consumo acumulado. Ahora, como permitimos a los inversionistas que se presten dinero teniendo como garantía el ingreso futuro, necesitamos una restricción de liquidez (ecuación (9)) para evitar las posibilidades de inadimplencia. Y para evitar las estrategias de arbitraje, tales como las estrategias dobles, necesitamos una condición tal como (8), la suficiencia de esta ecuación para evitar *free lunches* fue probada por Dybvig & Huang (1989).

Definición 1. *Dado el sistema de precios $\mathcal{P}$, un proceso de consumo $c_k \in \mathcal{C}$ es dicho factible con el ingreso e_k si existe una estrategia de negocios admisible $(\alpha_k, \theta_k) \in \Theta$ tal que (7)-(9) son satisfechas. Entonces decimos que (α_k, θ_k) financia c_k.*

Denotaremos el conjunto de procesos de consumo factibles, para el ingreso e_k dado $\mathcal{P}$, por $\mathcal{B}(e_k, \mathcal{P})$. Ahora, para cualquier sistema de precios dado $\mathcal{P}$ definamos *el proceso premio por riesgo estandarizado*[6]

$$\eta_0 = -\sigma'(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}\left(b(t) - r(t)\mathbf{1}\right) \tag{10}$$

y el proceso exponencial

$$Z_0(t) = exp\left(\int_0^t \eta_0'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\eta_0(s)\right|^2 ds\right) \tag{11}$$

[6] $\mathbf{1} = (1, .., 1) \in R^n$

con estos dos procesos tenemos el sistema de precios admisible

Definición 2. *Un sistema de precios $\mathcal{P} = (r, b)$ es admisible si:*

a) la tasa de interés satisface

$$\int_0^t |r(s)|ds < \infty \tag{12}$$

para todo $t \in [0, T]$ y existe una constante $K_1 > 0$ tal que

$$\int_0^T r(t)^- dt < K_1 \tag{13}$$

b) el proceso premio por riesgo estandarizado η_0 de (10) satisface la condición de Novikov:

$$E\left[exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\eta_0(t)|^2 dt\right)\right] < \infty \tag{14}$$

c) existe una única solución fuerte para la ecuación integral estocástica (2).

La condición *a)* asegura que el precio del Bono este bien definido y limitado. La condición *b)* es necesaria para garantizar la existencia de una medida martingala equivalente[7] y así evitamos oportunidades de arbitraje.

Con esta definición procedemos a definir equilibrio.

[7]Una medida martingala equivalente es una probabilidad Q la cual es equivalente a la medida original $\mathbf{P}$, *i.e.* ellas tienen los mismos conjuntos de medida nula, y tal que el proceso de precios descontados: $\{e^{-\int_0^t r(s)ds} P_t\}_{t \geq 0}$ es un martingala. Un proceso $\{X_t\}$ es dicho ser un $\{\mathcal{F}_t\}-$martingala (submartingala, supermartingala) si las siguientes condiciones son satisfechas:

i) $E\,|X_t| < \infty$.

ii) $E\left[X_t \,/\mathcal{F}_s\right] = X_s$ *c.t.p.* $\forall s \leq t$ $(\geq, \leq$. respectivamente).

Definición 3. *Un equilibrio de expectativas racionales para la economía $\mathcal{E}$ es un sistema de precios admisible $\mathcal{P}$ y un conjunto $\{c_k, (\alpha_k, \theta_k)\}$ de consumo admisible y estrategias de negocios tales que;*

(i) c_k *maximiza* U_k *en* $\mathcal{B}(e_k, \mathcal{P}) \cap \mathcal{C}_k$

(ii) (α_k, θ_k) *financia* c_k

(iii) los mercados están equilibrados, i.e.

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{K} \theta_k = 0, \quad y \quad \sum_{k=1}^{K} c_k = e.$$

4 Políticas Óptimas

La caracterización de las políticas optimas, sin utilizar programación dinámica, usando técnicas martingalas son debidas a Karatzas, Lehoczky & Shreve (1987) y Cox & Huang (1989,1991) en el caso de mercados completos y Karatzas, Lehoczky, Shreve & Xu (1991) y Cuoco (1997) en el caso de mercados incompletos. A seguir presentamos algunos de estos resultados que serán usados mas tarde.

Primero, supongamos que los mercados son completos, lo que significa imponer $(n = d)$[8]. En este caso el problema de maximizar la utilidad esperada sujeta a la restricción presupuestaria dinámica (7)-(9) es equivalente al problema de maximizar la utilidad esperada sujeta a la restricción presupuestaria tipo Arrow-Debreu

$$E\left[\int_0^T \gamma(t) Z_0(t) \left(c(t) - e_k(t)\right) dt\right] \leq 0 \tag{15}$$

donde Z_0 es la densidad de la única *medida martingala equivalente* o también conocida como *probabilidad neutra al riesgo*; esta es única debido a que los mercados son completos; su expresión es dada por la ecuación (11) y el proceso $H_0(\cdot) = \gamma(\cdot) Z_0(\cdot)$ es la única densidad de precios de estado para la economía, en el sentido que el valor en el tiempo cero (hoy) de cualquier

[8]Ver Karatzas & Shreve (1998)

proceso de consumo c es dado por $E\left[\int\limits_0^T H_0(t)c(t)dt\right]$.

Ahora, usando teoría de Lagrangiano, sabemos que si la solución óptima para el problema de optimización individual k es c_{k0}, entonces esta satisface la condición de primera orden

$$u_{kc}(c_{k0}(t),t) = \psi_k H_0(t) \tag{16}$$

Para algún multiplicador de Lagrange ψ_k tal que (15) es satisfecha como igualdad.

Para obtener una caracterización similar en el caso de mercados incompletos necesitamos extender la definición de medida martingala equivalente.

Definición 4. *Una medida de probabilidad Q en $(\Omega,\mathcal{F})$ es "localmente equivalente" a $\mathbf{P}$ si la restricción de Q a $\mathcal{F}_t$ es equivalente a la restricción de $\mathbf{P}$ a $\mathcal{F}_t$ para todo $t\in[0,T]$. Una medida de probabilidad Q localmente equivalente es dicha ser una medida martingala localmente equivalente se Q es absolutamente continua respecto de $\mathbf{P}$ y el proceso de precios descontados es un martingala local[9] sobre Q.*

El conjunto de medidas martingalas localmente equivalentes tiene una estructura explicita. Denotemos por $\mathcal{L}^2$ el conjunto de proceso adaptados $n-$dimensionales ξ tales que

$$\int\limits_0^t |\xi(s)|^2 ds < \infty$$

para todo $t\in[0,T]$ y descompongamos $\mathcal{L}^2$ en dos subconjuntos

$$K(\sigma) = \{\xi\in\mathcal{L}^2 : \sigma\xi = 0\ (P\times l) - a.e.\}$$
$$S(\sigma) = \{\xi\in\mathcal{L}^2 :\ \xi\in R(\sigma')(P\times l) - a.e\}$$

[9]Un proceso $\{X_t\}$ es dicho ser un martingala local si existe una secuencia $\{\mathcal{F}_t\}-$tiempos de parada τ_n tales que

i) $\tau_n\to\infty$ *c.t.p.*

ii) $\forall n\ \ \{X_{t\wedge\tau_n}\}$ es un $\{\mathcal{F}_t\} - martingala$.

donde l denota la medida de Lebesgue en $[0, T]$ y R denota la imagen. Ahora para cada $\nu \in K(\sigma)$ definamos $\eta_\nu(t) = \eta_0 + \nu(t)$, entonces el proceso exponencial

$$Z_\nu(t) = exp\left(\int_0^t \eta'_\nu(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\eta_\nu(s)|^2 ds\right) \tag{17}$$

esta bien definido y es un martingala local, continuo y estrictamente positivo [10]. Ahora denote por $\mathcal{N}$ el conjunto de $\nu \in K(\sigma)$ para los cuales el proceso Z_ν es un martingala uniformemente integrable[11]. Observe que el conjunto $\mathcal{N}$ es no-vació para cualquier sistema de precios admisible $\mathcal{P}$, porque (14) implica que $0 \in \mathcal{N}$. Este conjunto será bien útil como la medida martingala equivalente cambia cuando los mercados son incompletos, como la siguiente proposición nos muestra.

Proposición 1. *Una medida de probabilidad Q es una medida martingala localmente equivalente si y solamente si $\frac{dQ_t}{d\mathbf{P}_t} = Z_\nu(t)$ para algún $\nu \in \mathcal{N}$ y todo $t \in [0, T]$, donde $\mathbf{P}_t(Q_t)$ denota la restricción de $\mathbf{P}(Q)$ a $\mathcal{F}_t$.*

Prueba. Ver Cuoco & He (1994).□

De aquí es fácil ver que cuando los mercados son completos ($n = d$) y $\nu = 0$ debe suceder $(\mathbf{P} \times l)$. y entonces existe una única medida martingala localmente equivalente con densidad Z_0.
El siguiente lema caracteriza la densidad de precios de estado, usando las medidas martingala localmente equivalentes.

Lema 1. *Si c_k es factible para el ingreso e_k, entonces*

$$E\left[\int_0^T H_\nu(t)(c_k(t) - e_k(t))dt\right] \leq 0 \tag{18}$$

[10] Ver Jacod & Shirjaev (1987). Teorema I.4.61

[11] Un martingala $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es dicho ser uniformemente integrable

$$\sup_t \int_{|X_t|>c} |X_t|\, dP \to 0 \text{ cuando } c \to \infty$$

se cumple para todo $\nu \in \mathcal{N}$, donde $H_\nu(\cdot) = \gamma(\cdot)Z_\nu(\cdot)$. Recíprocamente, sea $c_k \in \mathcal{C}_k$ y suponga que existe un proceso $\nu_k \in \mathcal{N}$ tal que

$$E\left[\int_0^T H_\nu(t)(c_k(t) - e_k(t))dt\right] \leq E\left[\int_0^T H_{\nu_k}(t)(c_k(t) - e_k(t))dt\right] = 0 \quad (19)$$

para todo $\nu \in \mathcal{N}$. Entonces c_k es factible para el ingreso e_k.

Prueba.
La primera parte es consecuencia del Lema de Ito[12] y de la ecuación (7). Luego se tiene que usar el hecho que la esperanza de un integral estocástica en relación al Movimiento browniano es cero. Finalmente usando (9) el resultado sigue. Para la reciproca ver Teorema 1 en Cuoco (1997). □

Nos referiremos a (18) como *restricción presupuestaria estática*. El Lema 1 implica que nuestro problema de optimización puede ser reformulado como la maximización de la utilidad esperada sujeta a la secuencia de restricciones presupuestarias asociadas a las densidades H_ν con $\nu \in \mathcal{N}$. Entonces, podemos esperar que los gradientes de las utilidades evaluadas en las políticas óptimas sea una combinación lineal positiva de tales H_ν. Ahora por el Lema de Ito tenemos que el conjunto $\{H_\nu : \nu \in \mathcal{N}\}$ es un conjunto convexo, entonces el gradiente de la utilidad del agente k evaluada en la política optima es proporcional a la densidad de precios de estado H_{ν_k} con $\nu_k \in \mathcal{N}$, esto implica que la solución del problema de consumo individual para el agente k coincide con la solución del problema de maximización de la utilidad esperada del proceso de consumo $c \in \mathcal{C}_k$ satisfaciendo la restricción presupuestaria.

$$E\left[\int_0^T H_{\nu_k}(t)(c_k(t) - e_k(t))dt\right] \leq 0 \quad (20)$$

El proceso ν_k satisfaciendo las condiciones de arriba es necesariamente único, como $H_\nu(0) = 1$, $\forall \nu \in \mathcal{N}$, el proceso correspondiente H_{ν_k} ha sido definido como *la densidad de precios de estado minimax* por He & Pearson (1991), ya que puede ser caracterizado como la solución de un problema dual de minimización (vea Teorema 2). Karatzas, Lehoczky, Shreve & Xu (1991) interpreta la densidad de precios de estado minimax como la única densidad de

[12] Ver apéndice

precios de estado que seguirá prevaleciendo en un mercado artificial obtenido mediante la adición de activos adicionales tales que los agentes no querrán investir en ellos.

Observación

Observe que en general la densidad de precios de estado minimax para los K agentes serán diferentes, a menos que los mercados sean completos o la alocación sea Pareto-Eficiente.

En analogía con (16) nuestra solución es dada por

$$c_{\nu_k}(t) = f_k\left(\psi_k H_{\nu_k}(t), t\right) \tag{21}$$

donde ψ_k es el multiplicador de Lagrange, tal que la restricción (20) es satisfecha como igualdad. Podemos formalizar la intuición con el siguiente resultado.

Teorema 1. *Suponga que el proceso de consumo c_{ν_k} de (21) satisface la restricción presupuestaria(20) como igualdad para algún $\psi_k > 0$, $\nu_k \in \mathcal{N}$. Si existe estrategia financiando c_{ν_k}, entonces H_{ν_k} es la densidad de precio de estados minimax, c_{ν_k} es la política de consumo optimo para el agente k, y el correspondiente proceso de riqueza es dado por*

$$X_{\nu_k}(t) = {H_{\nu_k}}^{-1}(t) E\left[\int_t^T H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds \Big/ \mathcal{F}_t\right] \tag{22}$$

Prueba.

De la definición de c_{ν_k} y la continuidad de f_k y H_{ν_k} tenemos $\int_0^t c_{\nu_k}(s)ds < \infty$, $\forall t \in [0, T]$. Y de la desigualdad

$$u_k(1, t) - y \leq \max_{c>0}\left[u_k(c, t) - yc\right] = u_k(f_k(y, t), t) - y f_k(y, t),$$

obtenemos

$$E\left[\int_0^T u_k(c_{\nu_k}(t), t)^- dt\right] \leq \int_0^T u_k(1, t)^- dt + \psi_k E\left[\int_0^T \gamma(t) Z_{\nu_k}(t) dt\right] < \infty,$$

la última desigualdad viene de (5), (13) y la propiedad martingala de Z_{ν_k}. De aquí $c_{\nu_k} \in \mathcal{C}_k$.
Ahora tome un $c \in \mathcal{B}(e_k, \mathcal{P})$ arbitrario. Por la concavidad

$$u_k(f_k(x,t),t) - u_k(y,t) \geq x\,[f_k(x,t) - y] \;\; \forall x > 0, y > 0, \tag{23}$$

Tomando esperanza y escogiendo $x = \psi_k H_{\nu_k}$, tenemos

$$U_k(c_{\nu_k}) - U(c) \geq E\left[\int_0^T \psi_k H_{\nu_k}(t)(c_{\nu_k}(t) - c(t))dt\right] \geq 0, \tag{24}$$

por la definición de ψ_k tenemos

$$E\left[\int_0^T H_{\nu_k}(s)c_{\nu_k}(s)ds\right] = E\left[\int_0^T H_{\nu_k}(s)e_k(s)ds\right]. \tag{25}$$

Por el Lema 1 sabemos que c satisface (18). Entonces, obtenemos la última desigualdad (24), *i.e.* c_{ν_k} es optima. Para probar la última parte, sea (α_k, θ_k) la estrategia de negocios financiando c_{ν_k} y encontremos la expresión de la riqueza optima asociada a esta política optima.
Sea $X_k(t) = \alpha_k(t)B(t) + \theta'_k(t)P(t)$. Ahora de (7) y aplicando el Lema de Ito tenemos

$$H_{\nu_k}(t)X_k(t) = \int_0^t H_{\nu_k}(s)(e_{\nu_k}(s) - c_k(s))ds$$

$$+ \int_0^t H_{\nu_k}(s)(\theta'_k(s)\sigma(s) + X_k(s)\eta'_{\nu_k}(s))dW(s) \tag{26}$$

De aquí obtenemos

$$M(t) \equiv H_{\nu_k}(t)X_k(t) + \int_0^t H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds$$

$$= \int_0^t H_{\nu_k}(s)(\theta'_k(s)\sigma(s) + X_k(s)\eta'_{\nu_k}(s))dW(s) \tag{27}$$

De (13), (8) y el hecho que $\nu_k \in \mathcal{N}$, tenemos que $M(t)$ es uniformemente integrable por abajo y de su representación como una integral estocástica, tenemos que es un martingala local. Entonces, del Lema de Fatou, $M(t)$ es un supermartingala, lo que implica

$$EM(T) \leq EM(t) \leq M(0) = 0 \ \ \forall t \in [0,T].$$

También de (25) y (9), tenemos

$$EM(T) = E[H_{\nu_k}(T)X_k(T)] \geq 0, \tag{28}$$

entonces $EM(T) = EM(t) = M(0) = 0 \ \ \forall t \in [0,T]$, lo que significa que es un martingala [13]. Ahora de (9) y $E[H_{\nu_k}(T)X_k(T)] = 0$, obtenemos $X_k(T) = 0$, lo que implica,

$$H_{\nu_k}(t)X_k(t) + \int_0^t H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds = M(t)$$

$$= E[M(T) \mid \mathcal{F}_t] = E\left[\int_0^T H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds \Big/ \mathcal{F}_t\right]$$

finalmente, del hecho que $\int_0^t H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds$ es $\mathcal{F}_t-$medible, obtenemos (22).□

Acabamos de ver en el Teorema 1 implicaciones de la existencia de la densidad de precios de estado minimax para el agente k, *i.e.* la existencia de un proceso $\nu_k \in \mathcal{N}$ tal que la política asociada c_{ν_k} es consumida. El problema de la existencia de densidad de precios de estado minimax es discutida en el Apéndice.

Los resultados anteriores motivan la siguiente definición.

Definición 5. *Un equilibrio* $(\mathcal{P}, c_1, .., c_K)$ *es un equilibrio regular si existe una densidad de precios minimax* H_{ν_k} *para cada agente* k.

Con esta definición en mente, pasaremos a construir en la siguiente sección un agente representativo.

[13] Ver Karatzas & Shreve (1988), 1.3.25

5 Agente Representativo

Pasemos a construir un agente representativo que soporte el equilibrio regular $(\mathcal{P}, \bar{c}_1, .., \bar{c}_k)$, para nuestra economía $\mathcal{E}$, *i.e.* construiremos una función de utilidad U tal que $(\mathcal{P}, e)$ es un equilibrio sin negocios para la economía de un solo agente $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}), \sigma, U, e)$.

Defina la función $u(c, \lambda, t) : (0, \infty) \times (0, \infty)^K \times [0, T] \to I\!R$ por

$$u(c, \lambda, t) = \max_{\sum_{k=1}^{K} c_k = c} \left[\sum_{k=1}^{K} \lambda_k u_k(c_k, t) \right] \tag{29}$$

Sabemos que para cada $\lambda \in (0, \infty)^K$ fijo, la función u es estrictamente creciente, cóncava y continuamente diferenciable en su primer argumento; y satisface la condición de Inada (3) para todo $\lambda \in (0, \infty)^K$ y $t \in [0, T]$, estas propiedades son fáciles de verificar, ya que son heredadas de las funciones de utilidad individuales u_k. La solución del problema de alocación (29) es

$$c_k = f_k \left(\frac{u_c(c, \lambda, t)}{\lambda_k}, t \right), \quad \forall k \in \{1, .., K\} \tag{30}$$

Sumando (30) para todo k, obtenemos,

$$\sum_{k=1}^{K} f_k \left(\frac{u_c(c, \lambda, t)}{\lambda_k}, t \right) = c$$

luego la función,

$$f(x, \lambda, t) = \sum_{k=1}^{K} f_k \left(\frac{x}{\lambda_k}, t \right) \tag{31}$$

y u_c son inversas, *i.e.*

$$f(u_c(c, \lambda, t), \lambda, t) = c \tag{32}$$

De esta última ecuación y usando el Teorema de la Función Implícita, tenemos que u_c es dos veces continuamente diferenciable con respecto a λ.

Ahora mostremos que cualquier equilibrio regular de nuestra economía siempre puede ser soportado por un agente representativo con la siguiente función de utilidad dependiente del estado.

$$U(c,\lambda) = E\left[\int_0^T u(c(t),\lambda(t),t)dt\right]$$

con u dada por (29) y λ siendo un proceso adaptado.

Proposición 2. *Suponga que $(\mathcal{P},\bar{c}_1,..,\bar{c}_k)$ es un equilibrio regular para la economía $\mathcal{E}$. Entonces existe un proceso continuo y adaptado λ tal que el proceso de ingreso agregado "e" maximiza $U(c,\lambda)$ sobre $\mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^K e_k,\mathcal{P}\right)$ y las políticas de equilibrio $(\bar{c}_1,..,\bar{c}_k)$ resuelve el problema de alocación del agente representativo en (29) con $c=e(t)$ y $\lambda=\lambda(t)$ para todo $t\in[0,T]$. Con*

$$\lambda_k(t) = \frac{\psi_1 H_{\nu_1}(t)}{\psi_k H_{\nu_k}(t)},\ \forall\ k\in\{1,..,K\} \tag{33}$$

donde H_{ν_k} denota la densidad de precios de estado minimax para el agente k.

Prueba.

Primero verifiquemos la factibilidad de e, tomemos $\alpha=\theta=0$ en (7)-(9). Entonces tenemos $e\in\mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^K e_k,\mathcal{P}\right)$.
Ahora la optimalidad de e, sea $c_1,..,c_K$ un proceso no-negativo arbitrario y $c=\sum_{k=1}^K c_k\in\mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^K e_k,\mathcal{P}\right)$. Por el Lema 1 tenemos,

$$E\left[\int_0^T H_{\nu_1}(t)\left(\sum_{k=1}^K c_k(t)-\sum_{k=1}^K e_k(t)\right)dt\right]\leq 0 \tag{34}$$

Entonces tomando λ como en (33)

$$U(e,\lambda) - E\left[\int_0^T\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k u_k(c_k(t),t)\right)dt\right]$$

$$\geq E\left[\int_0^T\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) u_k(\bar{c}_k(t),t)\right)dt\right] - E\left[\int_0^T\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) u_k(c_k(t),t)\right)dt\right]$$

$$\geq E\left[\int_0^T\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k(t)\psi_k H_{\nu_k}(t)(\bar{c}_k(t)-c_k(t)\right)dt\right]$$

$$=\psi_1 E\left[\int_0^T H_{\nu_1}(t)\sum_{k=1}^K(\bar{c}_k(t)-c_k(t))\,dt\right]\geq 0$$

la primera desigualdad es obtenida de la definición de U y de la condición de mercados equilibrados, *i.e.* $\sum_{k=1}^K \bar{c}_k = e$, la segunda sigue de la optimalidad de $\bar{c}_k$ y (23) y la última de (34) y de la condición de mercados equilibrados. Como $(c_1, c_2, .., c_K)$ son arbitrarios tenemos

$$U(e,\lambda)\geq U(c,\lambda),\ \ \forall c\in\mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^K e_k,\mathcal{P}\right)$$

de aquí la optimalidad de e. Ahora, como en nuestro modelo las condiciones de primera orden son suficientes y necesarias; y por la concavidad estricta tenemos una solución única. □

El siguiente resultado muestra como los coeficientes de tolerancia al riesgo están relacionados en equilibrio.

Corolário 1. *El coeficiente de tolerancia al riesgo absoluto del agente representativo evaluado en el consumo agregado es la suma de los coeficientes de tolerancia al riesgo de cada agente evaluados en sus políticas óptimas de consumo:*

$$-\frac{u_c(e(t),\lambda(t),t)}{u_{cc}(e(t),\lambda(t),t)}=-\sum_{k=1}^K\frac{u_c(\bar{c}_k(t),t)}{u_{cc}(\bar{c}_k(t),t)} \tag{35}$$

Prueba.

Primero, tenemos que derivar (32) con respecto a c y usar (31). Finalmente, usando la segunda afirmación de la última proposición, tenemos que $(\bar{c}_1, .., \bar{c}_K)$ resuelve el problema de alocación del agente representativo, luego usando las condiciones de primera orden obtenemos el resultado.□

6 Equilibrio

En la última sección hemos construido un agente representativo para nuestra economía $\mathcal{E}$ usando un proceso adaptado λ, ahora usaremos este proceso para caracterizar el equilibrio de $\mathcal{E}$. Por último analizaremos las condiciones para las cuales los procesos con esta caracterización sean equilibrios.

Por (17) y la definición de H_{ν_k} tenemos,

$$dH_{\nu_k}(t) = H_{\nu_k}(t)\left(-r(t)dt + \eta'_{\nu_k}(t)dW(t)\right), \tag{36}$$

usando el Lema de Ito, tenemos que el proceso λ_k definido en (33) resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica para todo $k \in \{1,..,K\}$

$$d\lambda_k(t) = -\nu'_k(t)\left(\nu_1(t) - \nu_k(t)\right)\lambda_k(t)dt + \left(\nu_1(t) - \nu_k(t)\right)'\lambda_k(t)dW(t) \tag{37}$$

Y para facilitar la notación, denotemos por $\mathcal{G}$ el siguiente operador

$$(\mathcal{G}u)(c,\lambda,t) = \mu(t)u_c(c,\lambda,t) - \sum_{k=1}^{K}\nu'_k(t)(\nu_1(t) - \nu_k(t))\lambda_k(t)u_{\lambda_k}(c,\lambda,t)$$

$$+\frac{1}{2}u_{cc}(c,\lambda,t) \mid b(t) \mid^2 + \sum_{k=1}^{K} b(t)(\nu_1(t) - \nu_k(t))'\lambda_k u_{c\lambda_k}(c,\lambda,t)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{K}(\nu_1 - \nu_k)'(\nu_1 - \nu_j)\lambda_k\lambda_j u_{\lambda_k\lambda_j}(c,\lambda,t)$$

Luego tenemos la siguiente caracterización

Teorema 2. *Suponga que $(\mathcal{P},\bar{c}_1,..,\bar{c}_K)$ es un equilibrio regular para la economía $\mathcal{E}$. Defina la utilidad del agente representativo y el proceso λ como en la Proposición 2. Entonces el sistema de precios de equilibrio $\mathcal{P} = (r,b)$ y políticas de consumo son dadas en terminos de λ por*

$$r(t) = -\frac{\mathcal{G}u_c(e(t),\lambda(t),t) + u_{ct}(e(t),\lambda(t),t)}{u_c(e(t),\lambda(t),t)} \tag{38}$$

$$b(t) = r(t)\mathbf{1} - \frac{u_{cc}(e(t),\lambda(t),t)}{u_c(e(t),\lambda(t),t)}\sigma(t)\rho(t) \tag{39}$$

$$\bar{c}_k(t) = f_k\left(\frac{u_c(e(t),\lambda(t),t)}{\lambda_k(t)}, t\right) \tag{40}$$

Y la densidad de precios de estado minimax de los K agentes están relacionados en equilibrio por

$$\sum_{k=2}^{K}(\nu_1(t)-\nu_k(t))\lambda_k(t)u_{c\lambda_k}(t) = u_c(t)\nu_1(t) - u_{cc}(t)L(t)\rho(t) \tag{41}$$

donde $L(t) = I - \sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\sigma(t)$ y I denota la matriz identidad $n \times n$.

Prueba.
Primero, es fácil ver que (40) sigue de la Proposición 2 y (30). Ahora como $\lambda_1(t) = 1$, tenemos

$$u_c(e(t),\lambda(t),t) = u_{1c}(\bar{c}_1(t),t) = \psi_1 H_{\nu_1}(t),$$

entonces por (36), obtenemos

$$du_c(t) = -r(t)u_c(t)dt + u_c(t)\eta'_{\nu_1}(t)dW(t)$$

donde colocamos $u_c(t)$ en el lugar de $u_c(e(t),\lambda(t),t)$y lo mismo será hecho a seguir. por la Hipótesis 3 y (37) sabemos que $e(t)$ y $\lambda(t)$ procesos de Ito. Aplicando el Lema de Ito, tenemos

$$du_c(t) = (\mathcal{G}u_c(t) + u_{ct}(t))\,dt + \left(u_{cc}(t)\rho(t) + \sum_{k=1}^{K}(\nu_1(t)-\nu_k(t))\lambda_k(t)u_{c\lambda_k}(t)\right)' dW(t)$$

igualando los respectivos términos, obtenemos

$$-r(t)u_c(t) = \mathcal{G}u_c(t) + u_{ct}(t)$$

$$u_c(t)\eta_{\nu_1}(t) = u_{cc}(t)\rho(t) + \sum_{k=1}^{K}(\nu_1(t)-\nu_k(t))\lambda_k(t)u_{c\lambda_k}(t),$$

luego (38) sigue de la primera igualdad y descomponiendo la segunda tenemos la siguiente relación

$$u_c(t)\eta_0(t) + u_c(t)\nu_1(t) = u_{cc}(t)\Gamma(t)\rho(t)$$

$$+\left[u_{cc}(t)L(t)\rho(t)+\sum_{k=1}^{K}(\nu_1(t)-\nu_k(t))\lambda_k(t)u_{c\lambda_k}(t)\right], \qquad (42)$$

donde $\Gamma(t)=\sigma'(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}\sigma(t)$. Por la definición de $\mathcal{N}$ y L, tenemos que los segundo términos en cada miembro de la ecuación (42) pertenecen a $K(\sigma)$ y por (10), tenemos que los primeros términos pertenecen a $S(\sigma)$. Agrupando términos y usando la definición de η_0, obtenemos

$$-u_c(t)\left(b(t)-r(t)\mathbf{1}\right)=u_{cc}(t)\sigma(t)\rho(t)$$

$$u_c(t)\nu_1(t)=u_{cc}(t)L(t)\rho(t)+\sum_{k=1}^{K}(\nu_1(t)-\nu_k(t))\lambda_k(t)u_{c\lambda_k}(t),$$

esta dos ecuaciones nos dan (39) y (41).$\square$

Acabamos de ver que la tasa de interés real es igual a menos la taza esperada de crecimiento de la utilidad marginal de consumo del agente representativo y el exceso de taza de retorno de equilibrio en los activos con riesgo es proporcional a la covariancia condicional instantánea entre cambios de consumo y retornos de los activos. Estas relaciones establecen el CCAPM (Consumption based Capital Asset Pricing Model) de Breeden (1979) para nuestra economía. Sin embargo el resultado de Breeden asume que el equilibrio es Markoviano y la existencia de soluciones suaves para la ecuación de Bellman. Duffie & Zame (1989) y Karatzas, Lehoczky & Shreve (1990) obtuvieron este CCAPM para mercados completos, resultados com. mercados incompletos fueron obtenidos por Grossman & Shiller (1982) y Back (1991).

Ahora respondamos la siguiente pregunta: Dado que el proceso λ satisface (37) y (41) para algún $\nu=(\nu_1,..,\nu_k)\in(\mathcal{L}^2)^K$ y condiciones iniciales apropiadas $\lambda(0)$, ¿Cuando tal proceso (38)-(40) será un equilibrio para nuestra economía $\mathcal{E}$?

Para responder esta pregunta, Hagamos un cambio de variables: $\lambda_k(t)=e^{\beta_k(t)}$ con esto, garantizamos $\lambda_k(t)\in(0,\infty)$. Aplicando el Lema de Ito, obtenemos

$$d\beta_k(t)=-\frac{1}{2}(\mid\nu_1(t)\mid^2-\mid\nu_k(t)\mid^2)dt+(\nu_1(t)-\nu_k(t))'dW(t)$$

para un proceso dado $\nu_1 \in \mathcal{N}$, defina el sistema de precios $\mathcal{P}_{\nu_1}$ por (38)-(39). Ahora, haciendo $\beta = (\beta_1, .., \beta_K)$, podemos escribir la ecuación diferencial estocástica de $\mathcal{S} = (P, \beta)$ como sigue

$$d\mathcal{S}(t) = b_{\nu_1}(P(t), \beta(t), t, w)dt + \sigma_{\nu_1}(P(t), \beta(t), t, w)dW(t) \tag{43}$$

Como los coeficientes b_{ν_1} y σ_{ν_1} son continuos en sus dos primeros argumentos. Por un teorema de ecuaciones diferenciales estocásticas [14] sabemos que la solución de (43) es única y existe a menos de una explosión en el tiempo que depende de la condición inicial $\beta(0)$.

Ahora respondamos la pregunta.

Teorema 3. *Suponga que existe $\beta(0) \in I\!R^K$, $\nu_1 \in \mathcal{N}$, y λ satisfaciendo (37) y (41) para algún $\nu = (\nu_1, .., \nu_k) \in (\mathcal{L}^2)^K$ tal que*

(a) la ecuación (43) tiene una solución fuerte en $[0, T]$ y

$$E\left[\int_0^T u_c(e(t), \lambda(t), t)\left(f_1(u_c(e(t), \lambda(t), t), t) - e_1(t)\right)dt\right] = 0 \tag{44}$$

(b) para todo k la política de consumo $\bar{c}_k$ de (40) es negociado para el sistema de precios $\mathcal{P}_{\nu_1}$

(c) la tasa de interés satisfaze (13)

Se $\forall k \in \{2, .., K\}$, $E[Z_{\nu_k}(T)] = 1$ y $\sigma(t)\nu_k(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$, entonces $\nu_k \in \mathcal{N}$, $\forall k \in \{2, .., K\}$ y el sistema de precios $\mathcal{P}_{\nu_1}$ con la política de consumo en (40) define un equilibrio regular para la economía $\mathcal{E}$.

Prueba.

Ver Fajardo (2002).□

[14] Ver Protter (1990), Teorema 7.38

7 Conclusiones

Hemos mostrado como se construyen agentes representativos en economías a tiempo continuo, tanto con mercados incompletos y completos, con K agentes; con este agente representativo hemos caracterizado el equilibrio y analizado su existencia. Muchas extensiones de este modelo pueden ser realizadas, como por ejemplo introducir mas hechos estilizados de los retornos de los activos financieros, como introducir saltos en la difusión de los precios.

Otra extensión de interés, seria considerar restricciones a la participación de los agentes en el mercado financiero como es considerado por Başak and Cuoco (1998), ellos solo consideran dos agentes. También para hacer nuestro modelo más realista, deberíamos introducir en el mercado fricciones, como por ejemplo restricciones en las ventas al descubierto, costos de transacción, etc., como Shreve & Xu (1992a,b) y Cvitanić y Karatzas (1996) consideran para resolver el problema de consumo e inversión optima.

Una extensión mas difícil seria permitir que los agentes no cumplan con sus compromisos, es decir que sean inadinplentes. Dos posibles formas de lidar con este problema, seria usar los modelos con penalidades en la utilidad, como en Araujo, Monteiro & Páscoa (1998) o con garantías como en Araujo, Fajardo & Páscoa (2005), ambos modelos son en tiempo discreto.

8 Apéndice

Movimiento Browniano

$\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano Standard si:

1. W_t es continuo en t,
2. Para todo t y $s > t$, $W_s - W_t \sim N(0, s-t)$
3. Para cualquier $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tales que $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, las variables aleatórias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.

Simulemos la ecuación (2) para $d = 1$, $P(0) = 20$, $b = 14\%$, $\sigma = 20\%$ y $\Delta t = 0.01$, entonces

$$\Delta P = 0,0014P + 0,02P\varepsilon \quad \text{donde} \quad \varepsilon \sim N(0,1)$$

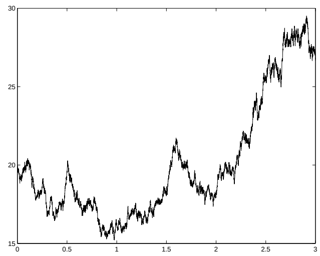

Fig. 3 Simulación del Movimiento Browniano Geométrico

Ahora decimos que un proceso con valores en $I\!R^n$, $X = \{X(t) : t \in [0,T]\}$ es progresivamente medible con relación a la filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ si para cada $t \in [0,T]$ el mapeamiento $(s,w) \mapsto X(s,w)$ de $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}(t))$ en $(I\!R^n, \mathcal{B}(I\!R^n))$ es medible, donde $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}(t)$ denota el producto de la $\sigma-$álgebra de Borel en $[0,T]$ y $\mathcal{F}(t)$.

Lema de Ito

Suponga que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es Movimiento Browniano Standard y X un proceso de Ito, i.e. $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, y sea $f : (0,\infty) \times [0,T] \to I\!R$ una función tal que $f \in C^{2,1}((0,\infty) \times [0,T])$. Entonces, el proceso $Y_t = f(X_t,t)$, es un proceso de Ito con

$$dY_t = \left[f_x(X_t,t)\mu_t + f_t(X_t,t) + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t,t)\sigma_t^2 \right] dt + f_x(X_t,t)\sigma_t dW_t$$

Esta expresión es conocida como Fórmula de Ito.

Densidad de Precios de Estado Minimax

Los siguientes resultados, que son debidos a He & Pearson (1991) y Karatzas, Lehoczky, Shreve & Xu (1991), nos da la caracterización de esta densidad. Denote el conjugado convexo de u_k por $\hat{u}_k(y,t).i.e.$

$$\hat{u}_k(y,t) \equiv \max_{c>0} [u_k(c,t) - yc] = u_k(f_k(y,t),t) - y f_k(y,t)$$

y para cualquier $(\psi, \nu) \in (0, \infty) \times \mathcal{N}$ defina

$$J_k(\psi, \nu) = E\left[\int_0^T \hat{u}_k(\psi H_\nu(t), t)dt + \psi \int_0^T H_\nu(t) e_k(t)dt\right],$$

la esperanza arriba esta bien definida, ya que tenemos de (4)

$$E\left[\int_0^T \hat{u}_k(\psi H_\nu(t), t)^- dt\right] \leq \int_0^T u_k(1, t)^- dt + \psi E\left[\int_0^T H_\nu(t)dt\right] < \infty$$

Teorema 4. *Si* $(\psi_k, \nu_k) \in (0, \infty) \times \mathcal{N}$ *resuelve el problema*

$$\inf_{\psi \in (0,\infty)} \inf_{\nu \in \mathcal{N}} J_k(\psi, \nu), \tag{45}$$

y

$$E\left[\int_0^T H_{\nu_k}(t) \left(f_k\left(\psi_k H_{\nu_k}(t), t\right) - e_k(t)\right) dt\right] < \infty, \tag{46}$$

entonces c_{ν_k} *es optima para el agente* k *y el proceso de riqueza optima es dado por* X_{ν_k}. *En particular* H_{ν_K} *identifica la densidad de precios de estado minimax para el agente* k.

El próximo resultado es debido a Cuoco & He (1994) y da condiciones suficientes para que las hipótesis del anterior teorema se cumplan.

Teorema 5. *Asuma que*

a) $u_k(\infty, t) = \infty$ *for all* $t \in [0, T]$ *and* $u_k(c, t)^- \leq k(1 + c^{1-b})$ *on* $(0, \infty) \times [0, T]$ *para algún* $k \geq 0, b \geq 1$*;*

b) $y/B > \epsilon$ $(l \times \mathbf{P}) - a.e.$ *para algún* $\epsilon > 0$*;*

c) $\forall \psi \in (0, \infty), \exists \nu \in \mathcal{N}$ *tal que* $J_k(\psi, \nu) < \infty$.

entonces el mínimo en (45) es atingido y la densidad de precios de estado minimax par el agente k existe. Si adicionalmente

d) $cu_{kc}(c, t) \leq a + (1 - b)u_k(c, t)$ *en* $(0, \infty) \times [0, T]$ *para algún* $a \geq 0, b > 0$,

entonces la condición (46) también es satisfecha, y de aquí existe una política optima de consumo e inversión para el agente k.

References

[1] Arrow, K. (1951), "An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics", in Proceedings of Second Berkeley Symposium.

[2] Araujo A., Fajardo J., and Páscoa, M. (2005), " Endogenous Collateral", *Journal of Mathematical Economics* **41**, 439-462.

[3] Araujo A., Monteiro P., and Páscoa, M. (1998), " Incomplete Markets, Continuum of states and Default", *Economic Theory* **11**, 205-213.

[4] Back, K. (1991), "Asset Pricing for General Processes", *Journal of Mathematical Economics* **20**, 371-395.

[5] Başak, S and Cuoco, D. (1998), "An Equilibrium Model with Restricted Stock Market Participation", *Review of Financial Studies* **11**, 309-341.

[6] Breeden, D.T (1979), "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics* **7**, 265-296.

[7] Constantinides, G.M. (1982), "Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and without Demand Aggregation", *Journal of Business* **55**, 253-267.

[8] Cox, J.C. and C.-F. Huang (1989), "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process", *Journal of Economic Theory* **49**, 33-83.

[9] Cox, J.C. and C.-F. Huang (1991), "A Variational Problem Arising in Financial Economics", *Journal of Mathematical Economics* **20**, 465-487.

[10] Cox, J.C. ,J.E. Ingersoll and S.A. Ross, (1985), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica* **53**, 363-384.

[11] Cuoco, D. (1997), " Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income", *Journal of Economic Theory* **72**, 33-73.

[12] Cuoco, D. and H.He (1994), " Dynamic Equilibrium in Infinite-Dimensional Economies with Incomplete Financial Markets". Preprint, Wharton School, University of Pennsylvania.

[13] Cvitanić, J. and I. Karatzas (1996), "Hedging and Portfolio Optimization under Transaction Costs: A Martingale Approach", *Mathematical finance* **6**, 133-165.

[14] Debreu, G. (1952), "A social equilibrium existence theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **38**, 886-893.

[15] Duffie, D. and W. Zame (1989), "Consumption-Based Capital Asset Pricing Model", *Econometrica* **57**, 1279-1297.

[16] Dumas, B. (1989), "Two-Person Dynamic Equilibrium in the Capital Market", *Review of Financial Studies* **2**, 157-188.

[17] Dybvig, P.H. and C.-F. Huang (1989), "Nonnegative Wealth, Absence of Arbitrage and Feasible Consumption Plans", *Review of Financial Studies* **1**, 377-401.

[18] Fajardo, J. (2000), " Optimal Consumption and Investment with Hyperbolic Lévy Motion", *Brazilian Review of Econometrics* **20**, 27-54.

[19] Fajardo, J. (2002), " Equilibrium in Stochastic Economies with Incomplete Financial Markets", *Brazilian Review of Econometrics* **22**, 67-102.

[20] Fajardo, J. (2003), ' Optimal Consumption and Investment with Lévy Processes", *Revista Brasileira de Economia* **57**, 825-848.

[21] Grossman, S.J. and R.J. Shiller (1982), "Consumption Correlatedness and Risk Measurement in Economies with Non-Traded Assets and Heterogeneous Information", *Journal of Financial Economies* **10**, 195-210.

[22] He, H. and H.D. Pearson (1991), "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Infinite Dimensional Case", *Journal of Economic Theory* **54**, 259-304.

[23] Huang, C.-F. (1987), "An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information", *Econometrica* **55**, 117-142.

[24] Jacka, S.D. (1992), "A Martingale Representation result and an Application to Incomplete Financial Markets", *Mathematical Finance* **2**, 239-250.

[25] Jacod, J. and A.N. Shiryaev (1987), *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York.

[26] Karatzas I., J.P. Lehoczky and S.E. Shreve (1987), "Optimal Consumption and Portfolio Decisions for a 'Small Investor" on a Finite Horizon", *SIAM Journal of Control and Optimization* **25**, 1557-1586.

[27] Karatzas I., J.P. Lehoczky and S.E. Shreve (1990), "Existence and Uniqueness of Multi-Agent Equilibrium in a Stochastic Economy, Dynamic Consumption/Investment Model", *Mathematics of Operations Research* **15**, 80-128.

[28] Karatzas I., J.P. Lehoczky, S.E. Shreve and G.-L. Xu (1991), "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in Incomplete Markets", *SIAM Journal of Control and Optimization* **29**, 702-730.

[29] Karatzas I. and S.E. Shreve (1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* , Springer-Verlag, New York.

[30] Karatzas I. and S.E. Shreve (1998), *Methods of Mathematical Finance.* Applications of Mathematics **39**, Springer-Verlag, New York.

[31] Laibson, D. (1998), "Life-cycle Consumption and Hyperbolic Discount Functions", *European Economic Review Papers and Proceedings*, **42**, 861-871.

[32] Laibson, D. (1997), "Golden Eggs and Hyperbolic Discounting", *Quarterly Journal of Economics*, **62**, 443-477.

[33] Mackenzie, L. (1955), "Competitive equilibrium with dependent consumer preferences", *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming.* Washington, 277-294.

[34] Negishi, T. (1960), "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Metroeconomica* **12**, 92-97.

[35] Pareto, W. (1896). Cours d'économie politique. Lausanne: Rouge.

[36] Protter, P. (1990), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[37] Shreve, S.H. and G.-L. Xu (1992a), "A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. I. General Market Coefficients", *Annals of Applied Probability* **2**, 87-112.

[38] Shreve, S.H. and G.-L. Xu (1992b), "A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. II. Constant Market Coefficients", *Annals of Applied Probability* **2**, 314-328.

[39] Walras, L. (1874). Elements d'économie politique pure. Lausanne: L. Corbaz