Processos de Lévy em Finanças: Modelos e Implementação Numérica

José Fajardo Barbachan

IBMEC Business School

Banco Central do Brasil, Agosto 9 - 13, 2004

Difussões e Pulos

Mais de três decadas de pesquisa em modelagem financeira e gestão de risco, tem analizado o uso de diffusões e processos com pulos, na seguinte tabela (tabela.doc) apresentamos o resumo da informação obtida com estes modelos.

Difussões e Pulos

Mais de três decadas de pesquisa em modelagem financeira e gestão de risco, tem analizado o uso de diffusões e processos com pulos, na seguinte tabela (tabela.doc) apresentamos o resumo da informação obtida com estes modelos.

O ponto importante não é o fato de que as difussões não oferecem um bom ajuste com os dados, de fato em algumas circunstâncias elas fazem um bom trabalho, se não que estas difussões tem as propriedades qualitativas erradas, e daqui se obtem a intuição errada sobre a flutuação dos preços e do risco resultante.

Diffusões e pulos

Uma forma de lidar com estes problemas seria usar Semimartingalas, porém a estrutura destes processos é muito complexa.

Diffusões e pulos

Uma forma de lidar com estes problemas seria usar Semimartingalas, porém a estrutura destes processos é muito complexa.

uma alternativa seria usar Processos de Lévy, Processos Aditivos (processos não homogeneos) ou modelos de volatilidade estocástica com pulos (Processos Ornstein-Uhlenbeck).

Diffusões e pulos

Uma forma de lidar com estes problemas seria usar Semimartingalas, porém a estrutura destes processos é muito complexa.

uma alternativa seria usar Processos de Lévy, Processos Aditivos (processos não homogeneos) ou modelos de volatilidade estocástica com pulos (Processos Ornstein-Uhlenbeck).

A continuação apresentaremos os Processos de Lévy, os quais nos permitem modelar varios dos fenômenos mencionados sem cair em muita abstração.

Processos de Lévy

Dizemos que $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ é um processo de Lévy, ou um processos com incrementos independentes e estacionarios, se:

Processos de Lévy

Dizemos que $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy, ou um processos com incrementos independentes e estacionarios, se:

- X tem caminhos continuos a direita com limite à ezquerda

Processos de Lévy

Dizemos que $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ é um processo de Lévy, ou um processos com incrementos independentes e estacionarios, se:

- X tem caminhos continuos a direita com limite à ezquerda
- $X_0 = 0$, e tem incrementos independentes, isto é, dados $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, as v.a.

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são independentes.

Processos de Lévy

Dizemos que $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy, ou um processos com incrementos independentes e estacionarios, se:

- X tem caminhos continuos a direita com limite à ezquerda
- $X_0 = 0$, e tem incrementos independentes, isto é, dados $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, as v.a.

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  são independentes.
- A distribuição do incremento $X_t - X_s$ é homogénea no tempo, é dizer, depende únicamente da diferença $t - s$.

Observações

- Devido à independência dos incrementos não se pode modelar à memoria (isto pode ser feito em modelos de volatilidade estocástica).

Observações

- Devido à independência dos incrementos não se pode modelar à memoria (isto pode ser feito em modelos de volatilidade estocástica).
- Devido à homogeneidade no tempo não é possível uma representação flexível da estrutura a termo da volatilidade ímplicita (para isto podem ser usados processos aditivos).

Formula de Lévy-Khintchine

Um resultado chave na teoria de processos de Lévy é a formula de Lévy-Khintchine, que calcula a função característica das variáveis X_t como:

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}$$

Formula de Lévy-Khintchine

Um resultado chave na teoria de processos de Lévy é a formula de Lévy-Khintchine, que calcula a função característica das variáveis X_t como:

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}$$

Onde a função ψ chama-se *expoente característico* , e esta dado por:

Formula de Lévy-Khintchine

Um resultado chave na teoria de processos de Lévy é a formula de Lévy-Khintchine, que calcula a função característica das variáveis X_t como:

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}$$

Onde a função ψ chama-se *expoente característico* , e esta dado por:

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{I\!R}(e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|\mathbf{y}|<\mathbf{1}\}})\mathbf{\Pi(dy)}$$

Onde b e $\sigma \geq 0$ são constantes reais, e Π é uma medida positiva em $I\!R - \{0\}$ tais que $\int(1 \wedge y^2)\Pi(dy) < \infty$, que chama-se medida de Lévy,

Formula de Lévy-Khintchine

Lembre que a função característica esta sempre definida para valores de z imaginarios puros.

Formula de Lévy-Khintchine

Lembre que a função característica esta sempre definida para valores de z imaginarios puros.

Apartir daqui identificaremos a distribuição de um Processo de Lévy como a tripleta (b, σ, Π).

Formula de Lévy-Khintchine

Lembre que a função característica esta sempre definida para valores de z imaginarios puros.

Apartir daqui identificaremos a distribuição de um Processo de Lévy como a tripleta (b, σ, Π).

Os processos de Lévy são a menor classe de processos fechada frente a soma de processos independentes e limites fracos, que contem o Movimento Browniano e o Processo de Poisson.

Exemplos: Processo de Poisson

1. Seja $\{N_t\}$ um processo de Poisson de parametro α, para cada $t > 0$ a v.a. N_t têm distribuição de Poisson com parâmetro αt, isto é:

Exemplos: Processo de Poisson

1. Seja $\{N_t\}$ um processo de Poisson de parametro α, para cada $t > 0$ a v.a. N_t têm distribuição de Poisson com parâmetro αt, isto é:

$$P(N_t = n) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^n/n!, \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

Exemplos: Processo de Poisson

1. Seja $\{N_t\}$ um processo de Poisson de parametro α, para cada $t > 0$ a v.a. N_t têm distribuição de Poisson com parâmetro αt, isto é:

$$P(N_t = n) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^n/n!, \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

Daqui

$$Ee^{zN_t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{zn} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^z \alpha t)^n}{n!} = e^{\alpha t(e^z - 1)}$$

Exemplos: Processo de Poisson

1. Seja $\{N_t\}$ um processo de Poisson de parametro α, para cada $t > 0$ a v.a. N_t têm distribuição de Poisson com parâmetro αt, isto é:

$$P(N_t = n) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^n/n!, \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

Daqui

$$Ee^{zN_t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{zn} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^z \alpha t)^n}{n!} = e^{\alpha t(e^z - 1)}$$

Daqui o expoente característico é:

$$\psi(z) = \alpha t(e^z - 1) = \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1)\Pi(dy), \; Onde \;\; \Pi(dy) = \alpha \delta_1(dy)$$

Exemplos:

Processo de Poisson Composto

2. Seja $\{Y_t\}$ um processo de Poisson composto, definido por:

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0$$

Onde $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de parâmetro α, e $\{Z_n\}$ é uma sequência de v.a. i.i.d., com distribuição $F(x)$, além disto N e Z são mutuamente independentes.

Exemplos:

Processo de Poisson Composto

2. Seja $\{Y_t\}$ um processo de Poisson composto, definido por:

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0$$

Onde $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de parâmetro α, e $\{Z_n\}$ é uma sequência de v.a. i.i.d., com distribuição $F(x)$, além disto N e Z são mutuamente independentes. O processo Y resulta ter incrementos independentes e estacionarios. Encontremos ψ:

Exemplos:

Processo de Poisson Composto

2. Seja $\{Y_t\}$ um processo de Poisson composto, definido por:

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0$$

Onde $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de parâmetro α, e $\{Z_n\}$ é uma sequência de v.a. i.i.d., com distribuição $F(x)$, além disto N e Z são mutuamente independentes. O processo Y resulta ter incrementos independentes e estacionarios. Encontremos ψ:

$$Ee^{zY_t} = Ee^{z\sum_{k=1}^{N_t} Z_k} = \sum_{n=0}^{\infty} Ee^{z\sum_{k=1}^{n} Z_k} P(N_t = n)$$

Exemplos:
Processo de Poisson Composto

$$Ee^{zY_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(Ee^{zZ_1} \right)^n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{t\alpha(Ee^{zZ_1} - 1)}$$

Exemplos:
Processo de Poisson Composto

$$Ee^{zY_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(Ee^{zZ_1}\right)^n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{t\alpha(Ee^{zZ_1}-1)}$$

Daqui temos:

$$\psi(z) = \alpha(Ee^{zZ_1}-1) = \alpha \int_{\mathbb{R}} (e^{zy}-1)F(dy) = \int_{\mathbb{R}} (e^{zy}-1)\Pi(dy)$$

Exemplos:
Processo de Poisson Composto

$$Ee^{zY_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(Ee^{zZ_1} \right)^n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{t\alpha (Ee^{zZ_1} - 1)}$$

Daqui temos:

$$\psi(z) = \alpha(Ee^{zZ_1} - 1) = \alpha \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1) F(dy) = \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1) \Pi(dy)$$

Onde $\Pi(dy) = \alpha F(dy)$ é a medida de Lévy, neste caso também temos $b = \sigma = 0$.

Exemplo: Processo de Wiener $\{W_t\}$

Seja $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$,

Exemplo: Processo de Wiener $\{W_t\}$

Seja $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$, temos

$$f(z) = Ee^{zW_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Exemplo: Processo de Wiener $\{W_t\}$

Seja $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$, temos

$$f(z) = Ee^{zW_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Para calcular esta integral derivamos a função,

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{zx - \frac{x^2}{2t}} dx = \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} d\left(-e^{-\frac{x^2}{2t}}\right).$$

Exemplo: Processo de Wiener $\{W_t\}$

Seja $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$, temos

$$f(z) = Ee^{zW_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Para calcular esta integral derivamos a função,

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{zx - \frac{x^2}{2t}} dx = \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} d\left(-e^{-\frac{x^2}{2t}}\right).$$

Após integrar por partes temos,

$$f'(z) = \frac{tz}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx - \frac{x^2}{2t}} dx = tzf(z)$$

Exemplo: Processo de Wiener $\{W_t\}$

Seja $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$, temos

$$f(z) = Ee^{zW_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Para calcular esta integral derivamos a função,

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{zx - \frac{x^2}{2t}} dx = \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} d\left(-e^{-\frac{x^2}{2t}}\right).$$

Após integrar por partes temos,

$$f'(z) = \frac{tz}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx - \frac{x^2}{2t}} dx = tzf(z)$$

Daqui $f(z) = e^{tz^2/2}$, de onde obtemos: $\psi(z) = \frac{z^2}{2}$.

Exemplo: Difusão com Pulos

Seja $\{X_t\}$ um processo definido por

$$X_t = at + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t > 0.$$

Exemplo: Difussão com Pulos

Seja $\{X_t\}$ um processo definido por

$$X_t = at + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t > 0.$$

Onde a e σ são constantes, $\{W_t\}$ é um processo de Wiener, $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de parâmetro α e $\{Z_n\}$ é um asequência de v.a. i.i.d com distribuição $F(x)$, além disto W, N, Z são mutuamente independentes. Encontremos ψ:

Exemplo: Difussão com Pulos

Seja $\{X_t\}$ um processo definido por

$$X_t = at + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t > 0.$$

Onde a e σ são constantes, $\{W_t\}$ é um processo de Wiener, $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de parâmetro α e $\{Z_n\}$ é um asequência de v.a. i.i.d com distribuição $F(x)$, além disto W, N, Z são mutuamente independentes. Encontremos ψ:

$$Ee^{zX_t} = e^{azt} Ee^{z\sigma W_t} Ee^{z\sum_{k=1}^{N_t} Z_k} = e^{t(az+\sigma^2 \frac{z^2}{2} + \alpha \int_{I\!R}(e^{zy}-1)F(dy))}$$

Exemplo: Difussão com Pulos

Seja $\{X_t\}$ um processo definido por

$$X_t = at + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t > 0.$$

Onde a e σ são constantes, $\{W_t\}$ é um processo de Wiener, $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de parâmetro α e $\{Z_n\}$ é um asequência de v.a. i.i.d com distribuição $F(x)$, além disto W, N, Z são mutuamente independentes. Encontremos ψ:

$$Ee^{zX_t} = e^{azt} Ee^{z\sigma W_t} Ee^{z\sum_{k=1}^{N_t} Z_k} = e^{t(az+\sigma^2\frac{z^2}{2}+\alpha\int_{I\!R}(e^{zy}-1)F(dy))}$$

Então $\quad \psi(z) = az + \sigma^2 \frac{z^2}{2} + \int_{I\!R}(e^{zy} - 1)\Pi(dy)$,

Onde $\Pi(dy) = \alpha F(dy)$.

Observações

- No exemplo anterior nehum dos parametros (a, σ, Π) é nulo, e a formula de ψ obtida é simples, isto é devido ao fato que a intensidade dos pulos considerada é finita (atividade finita), mais exatamente dizemos que um processo de Lévy de puros pulos se

$$\int_{I\!R-\{0\}} \Pi(dy) < \infty.$$

Observações

- No exemplo anterior nehum dos parametros (a, σ, Π) é nulo, e a formula de ψ obtida é simples, isto é devido ao fato que a intensidade dos pulos considerada é finita (atividade finita), mais exatamente dizemos que um processo de Lévy de puros pulos se

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} \Pi(dy) < \infty.$$

- O caso mais geral é obtido para processos que presentam uma quantidade infinita de pulos num intervalo de tempo (atividade infinita).

Medidas de Lévy

Veremos mais a frente como saber o exponente caracterisitico vai ser de muita ajuda para descobrir a distribuição do ativo subjacente em qualquer instante de tempo (ver medidas.doc)

Medidas de Lévy

Veremos mais a frente como saber o exponente caracterisitico vai ser de muita ajuda para descobrir a distribuição do ativo subjacente em qualquer instante de tempo (ver medidas.doc)

Lembremos que para qualquer função $f : I\!R \to \mathbb{C}$ tais que $\int_{I\!R} f(x)dx$ existe, podemos definir a transformada de Fourier:

$$\widehat{f}(x) = \int_{I\!R} e^{ixy} f(y)dy$$

Medidas de Lévy

Veremos mais a frente como saber o exponente caracterisitico vai ser de muita ajuda para descobrir a distribuição do ativo subjacente em qualquer instante de tempo (ver medidas.doc)

Lembremos que para qualquer função $f : I\!R \to \mathbb{C}$ tais que $\int_{I\!R} f(x)dx$ existe, podemos definir a transformada de Fourier:

$$\widehat{f}(x) = \int_{I\!R} e^{ixy} f(y)dy$$

Se μ é uma medida de probabilidade em $I\!R$ com densidade f então escrevemos: $\widehat{\mu}(x) = \int_{I\!R} e^{ixy} f(y)dy$

Medidas de Lévy

A convolução de duas medidas de probabilidade μ e ν com densidades f e g, respetivamente é dada por:

$$(\mu * \nu)(B) = \int_B \int \mathbb{R} f(x-y)g(y)dydx$$

Medidas de Lévy

A convolução de duas medidas de probabilidade μ e ν com densidades f e g, respetivamente é dada por:

$$(\mu * \nu)(B) = \int_B \int \mathbb{R} f(x-y)g(y)dydx$$

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a. independentes, então

$$\widehat{(\sum_i X_i)} = \prod_i \widehat{X}_i$$

Medidas de Lévy

A convolução de duas medidas de probabilidade μ e ν com densidades f e g, respetivamente é dada por:

$$(\mu * \nu)(B) = \int_B \int I\!R f(x-y)g(y)dydx$$

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a. independentes, então

$$(\widehat{\sum_i X_i}) = \prod_i \widehat{X}_i$$

Existe uma relação 1-1 entre medidas de probabilidade e sua transformada de Fourier, a relaçaõ inversa chama-se Transformada inversa de fourier.