Finanças em Tempo Contínuo

José Fajardo Barbachan

IBMEC Business School

Universidade Nova de Lisboa, Outubro 13 - 23, 2003

Opções Americanas

Por que e Quando o exercício antecipado é ótimo?

Opções Americanas

Por que e Quando o exercício antecipado é ótimo?

Call Americana sem dividendos:

Opções Americanas

Por que e Quando o exercício antecipado é ótimo?
Call Americana sem dividendos:

- Provemos que:

$$C(S,t) \geq c(S,t) \geq \max\{0, S - KP(t,T)\}$$

Opções Americanas

Por que e Quando o exercício antecipado é ótimo?
Call Americana sem dividendos:

- Provemos que:

$$C(S,t) \geq c(S,t) \geq \max\{0, S - KP(t,T)\}$$

onde C é o preço de uma call americana, c é o da uma Européia, $P(t,T)$ é o preço de um título que paga \$1 na maturidade, logo $KP(t,T)$ é o valor presente do preço de exercício.

Opções Americanas

Por que e Quando o exercício antecipado é ótimo?
Call Americana sem dividendos:

- Provemos que:

$$C(S,t) \geq c(S,t) \geq \max\{0, S - KP(t,T)\}$$

  onde C é o preço de uma call americana, c é o da uma Européia, $P(t,T)$ é o preço de um título que paga \$1 na maturidade, logo $KP(t,T)$ é o valor presente do preço de exercício.

- Considere as seguintes carteiras:
  (A) gastar numa call c e $KP(t,T)$ em T-títulos.
  (B) Comprar o ativo a S_t:

Opções Americanas

Vejamos os possíveis retornos:

	Carteira A	Carteira B
Valor atual	$c(S_t, t) + KP(t, T)$	S_t
Valor em T se $S_T > K$	$(S_T - K) + K$	S_T
Valor em T se $S_T < K$	K	S_T

Opções Americanas

Vejamos os possíveis retornos:

	Carteira A	Carteira B
Valor atual	$c(S_t, t) + KP(t, T)$	S_t
Valor em T se $S_T > K$	$(S_T - K) + K$	S_T
Valor em T se $S_T < K$	K	S_T

Na data T a carteira (A) domina a carteira (B), para qualquer valor de S_T. Por tanto deve custar mais!.

Opções Americanas

Vejamos os possíveis retornos:

	Carteira A	Carteira B
Valor atual	$c(S_t, t) + KP(t, T)$	S_t
Valor em T se $S_T > K$	$(S_T - K) + K$	S_T
Valor em T se $S_T < K$	K	S_T

Na data T a carteira (A) domina a carteira (B), para qualquer valor de S_T. Por tanto deve custar mais!. Além disto, já é sabido que $C > c$.

Opções Americanas

Vejamos os possíveis retornos:

	Carteira A	Carteira B
Valor atual	$c(S_t,t) + KP(t,T)$	S_t
Valor em T se $S_T > K$	$(S_T - K) + K$	S_T
Valor em T se $S_T < K$	K	S_T

Na data T a carteira (A) domina a carteira (B), para qualquer valor de S_T. Por tanto deve custar mais!.
Além disto, já é sabido que $C > c$.
Usando isto definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - KP(t,T) + IC(S,t)$$

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t)-(S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} \quad = \quad \underbrace{K-KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K}+IC(S,t)$$

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K} + IC(S,t)$$

- O lado esquerdo representa o que se perdería caso exerça na data t: Se perdio o valor da call, quando pudo ter sido vendida

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} \quad = \quad \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K} + IC(S,t)$$

- O lado esquerdo representa o que se perdería caso exerça na data t: Se perdio o valor da call, quando pudo ter sido vendida
- O exercício antecipado é ótimo $\Leftrightarrow C(S,t) < S - K$

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t)-(S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} \quad = \quad \underbrace{K-KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K}+IC(S,t)$$

- O lado esquerdo representa o que se perdería caso exerça na data t: Se perdio o valor da call, quando pudo ter sido vendida
- O exercício antecipado é ótimo $\Leftrightarrow C(S,t) < S-K$
- Existem 2 fatores que afetam a desição de exercer ou não:

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t)-(S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = \underbrace{K-KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K} + IC(S,t)$$

- O lado esquerdo representa o que se perdería caso exerça na data t: Se perdio o valor da call, quando pudo ter sido vendida
- O exercício antecipado é ótimo $\Leftrightarrow C(S,t) < S-K$
- Existem 2 fatores que afetam a desição de exercer ou não: A perda dos juros de K entre $[t,T]$ e

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t)-(S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = \underbrace{K-KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K}+IC(S,t)$$

- O lado esquerdo representa o que se perdería caso exerça na data t: Se perdio o valor da call, quando pudo ter sido vendida
- O exercício antecipado é ótimo $\Leftrightarrow C(S,t) < S-K$
- Existem 2 fatores que afetam a desição de exercer ou não: A perda dos juros de K entre $[t,T]$ e A perda do valor de seguro provido pela call

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t)-(S-K)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = \underbrace{K-KP(t,T)}_{\text{Valor no tempo de } K} + IC(S,t)$$

- O lado esquerdo representa o que se perdería caso exerça na data t: Se perdio o valor da call, quando pudo ter sido vendida
- O exercício antecipado é ótimo $\Leftrightarrow C(S,t) < S-K$
- Existem 2 fatores que afetam a desição de exercer ou não: A perda dos juros de K entre $[t,T]$ e A perda do valor de seguro provido pela call
- Dado que $IC \geq 0$ e $K \geq KP$ exercer a call cedo não é ótimo, pq produz perda em ambos fatores.

Opções Americanas

Put Americana sem dividendos:

Opções Americanas

Put Americana sem dividendos:

- Similarmente temos:

$$P(S,t) \geq p(S,t) \geq \max\{0, KP(t,T) - S\}$$

Opções Americanas

Put Americana sem dividendos:

- Similarmente temos:

$$P(S,t) \geq p(S,t) \geq \max\{0, KP(t,T) - S\}$$

onde P é o preço de uma put americana, p é o da uma Européia.

Opções Americanas

Put Americana sem dividendos:

- Similarmente temos:

$$P(S,t) \geq p(S,t) \geq \max\{0, KP(t,T) - S\}$$

  onde P é o preço de uma put americana, p é o da uma Européia.

- Definamos o valor de seguro da put por IP $(IP \geq 0)$:

$$P(S,t) = KP(t,T) - S + IP(S,t)$$

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = -\underbrace{[K-KP(t,T)]}_{\text{Valor no tempo de } K} + IP(S,t)$$

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = -\underbrace{[K-KP(t,T)]}_{\text{Valor no tempo de } K} + IP(S,t)$$

- Outra vez existem 2 fatores que afetam a desição de exercer cedo ou não:

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = - \underbrace{[K - KP(t,T)]}_{\text{Valor no tempo de } K} + IP(S,t)$$

- Outra vez existem 2 fatores que afetam a desição de exercer cedo ou não: Receber K em t no lugar de em T (Bom!) e

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = -\underbrace{[K-KP(t,T)]}_{\text{Valor no tempo de } K} + IP(S,t)$$

- Outra vez existem 2 fatores que afetam a desição de exercer cedo ou não: Receber K em t no lugar de em T (Bom!) e a perda do valor de seguro provido pela put (Ruin!).

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = -\underbrace{[K-KP(t,T)]}_{\text{Valor no tempo de } K} + IP(S,t)$$

- Outra vez existem 2 fatores que afetam a desição de exercer cedo ou não: Receber K em t no lugar de em T (Bom!) e a perda do valor de seguro provido pela put (Ruin!). Agora estos dos fatores são conflictantes

Opções Americanas

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{Perda caso exercício em } t} = -\underbrace{[K-KP(t,T)]}_{\text{Valor no tempo de } K} + IP(S,t)$$

- Outra vez existem 2 fatores que afetam a desição de exercer cedo ou não: Receber K em t no lugar de em T (Bom!) e a perda do valor de seguro provido pela put (Ruin!). Agora estos dos fatores são conflictantes
- A diferença esencial com a call é que o lado direito pode ser negativo, o que faria ótimo o exercício antecipado.

Opções Americanas

Call Americana com dividendos:

Opções Americanas

Call Americana com dividendos:
Seja D o dividendo pago em τ, $t < \tau \leq T$. Considere as seguintes carteiras:

(A) Gastar numa call, K em T-títulos e D em τ-títulos.
(B) Comprar o ativo a S_t:

Opções Americanas

Call Americana com dividendos:

Seja D o dividendo pago em $\tau,\ t < \tau \leq T$. Considere as seguintes carteiras:

(A) Gastar numa call, K em T-títulos e D em τ-títulos.
(B) Comprar o ativo a S_t:

	A	B
V.atual	$c(S_t,t) + KP(t,T) + DP(t,\tau)$	S_t
$S_T > K$	$(S_T - K) + [K + D/P(\tau,T)]$	$S_T + D/P(\tau,T)$
$S_T < K$	$K + D/P(\tau,T)$	$S_T + D/P(\tau,T)$

Opções Americanas

Call Americana com dividendos:
Seja D o dividendo pago em $\tau,\ t < \tau \leq T$. Considere as seguintes carteiras:

(A) Gastar numa call, K em T-títulos e D em τ-títulos.
(B) Comprar o ativo a S_t:

	A	B
V.atual	$c(S_t, t) + KP(t, T) + DP(t, \tau)$	S_t
$S_T > K$	$(S_T - K) + [K + D/P(\tau, T)]$	$S_T + D/P(\tau, T)$
$S_T < K$	$K + D/P(\tau, T)$	$S_T + D/P(\tau, T)$

Daqui $c(S_t, t) + KP(t, T) + DP(t, \tau) \geq S_t$, logo:

Opções Americanas

Call Americana com dividendos:
Seja D o dividendo pago em $\tau,\ t < \tau \leq T$. Considere as seguintes carteiras:

(A) Gastar numa call, K em T-títulos e D em τ-títulos.
(B) Comprar o ativo a S_t:

	A	B
V.atual	$c(S_t, t) + KP(t, T) + DP(t, \tau)$	S_t
$S_T > K$	$(S_T - K) + [K + D/P(\tau, T)]$	$S_T + D/P(\tau, T)$
$S_T < K$	$K + D/P(\tau, T)$	$S_T + D/P(\tau, T)$

Daqui $c(S_t, t) + KP(t, T) + DP(t, \tau) \geq S_t$, logo:

$$C(s, t) \geq c(S, t) \geq S - [KP(t, T) + DP(t, \tau)]$$

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC ($IC \geq 0$):

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Podemos re-escrever como:

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{V.no tempo de } K} + IC(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{V.no tempo de } K} + IC(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

- Existem 3 fatores que afetam a desição de exercer ou não:

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{V.no tempo de } K} + IC(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

- Existem 3 fatores que afetam a desição de exercer ou não: A perda dos juros de K entre $[t,T]$,

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{V.no tempo de } K} + IC(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

- Existem 3 fatores que afetam a desição de exercer ou não: A perda dos juros de K entre $[t,T]$, A perda do valor de seguro provido pela call e

Opções Americanas

Definamos o valor de seguro da call por IC $(IC \geq 0)$:

$$C(S,t) = S - [KP(t,T) + DP(t,\tau)] + IC(S,t)$$

Podemos re-escrever como:

$$\underbrace{C(S,t) - (S-K)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{K - KP(t,T)}_{\text{V.no tempo de } K} + IC(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

- Existem 3 fatores que afetam a desição de exercer ou não: A perda dos juros de K entre $[t,T]$, A perda do valor de seguro provido pela call e O ganho dos dividendos a receber em τ.

Opções Americanas

- Daqui o exercício antecipado pode ser ótimo se o valor presente dos dividendos é o grande suficiente para dominar os outros 2 fatores

Opções Americanas

- Daqui o exercício antecipado pode ser ótimo se o valor presente dos dividendos é o grande suficiente para dominar os outros 2 fatores
- Entanto o t é mais próximo de τ, isto é mais provável. O termo $DB(t,\tau)$ será máximo exatamente após que o dividendo seja pago!.

Opções Americanas

- Daqui o exercício antecipado pode ser ótimo se o valor presente dos dividendos é o grande suficiente para dominar os outros 2 fatores
- Entanto o t é mais próximo de τ, isto é mais provável. O termo $DB(t, \tau)$ será máximo exatamente após que o dividendo seja pago!. Este é o único momento em que o exercíco pode ser ótimo.

Opções Americanas

Put Americana com dividendos:

Opções Americanas

Put Americana com dividendos:

De forma análoga temos:

Opções Americanas

Put Americana com dividendos:

De forma análoga temos:

$$\underbrace{P(S,t) - (K - S)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{-(K - KP(t,T))}_{\text{V.no tempo de } K} + IP(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

Opções Americanas

Put Americana com dividendos:

De forma análoga temos:

$$\underbrace{P(S,t)-(K-S)}_{\text{P. exercício em } t} = \underbrace{-(K–KP(t,T))}_{\text{V.no tempo de } K} + IP(S,t) - \underbrace{DP(t,\tau)}_{\text{V.P dividendos}}$$

- Daqui exercer cedo significa perder o valor presente dos dividendos, logo é menos comun o execicio antecipado da put com dividendos que sim.

Opções Americanas

- Logo exercer cedo significa perder o valor presente dos dividendos, por tanto é menos comun o execicio antecipado da put com dividendos que sim.

Opções Americanas

- Logo exercer cedo significa perder o valor presente dos dividendos, por tanto é menos comun o execicio antecipado da put com dividendos que sim.
- O exercício antecipado pode acontecer em qualquer instante, a diferença da call que aconteçe logo após o pago dos dividendos.

Opções Americanas

- Logo exercer cedo significa perder o valor presente dos dividendos, por tanto é menos comun o execicio antecipado da put com dividendos que sim.
- O exercício antecipado pode acontecer em qualquer instante, a diferença da call que aconteçe logo após o pago dos dividendos. Porém , terá mais chance de acontecer se $DP(t,\tau)$ é pequeno,i.e. τ esta longe.

Opções Americanas

- Logo exercer cedo significa perder o valor presente dos dividendos, por tanto é menos comun o execicio antecipado da put com dividendos que sim.
- O exercício antecipado pode acontecer em qualquer instante, a diferença da call que aconteçe logo após o pago dos dividendos. Porém , terá mais chance de acontecer se $DP(t, \tau)$ é pequeno,i.e. τ esta longe.
- Nunca será ótimo o exercício da put logo após o pagamento dos dividendos. Em outras palavras os dividendos atrasam o exercício.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

- Lembremos a EDP de uma Put Européia:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial S}(r - \delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rp = 0$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

- Lembremos a EDP de uma Put Européia:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial S}(r-\delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rp = 0$$

- Condição Final:

$$p(S,T) = g(S) = \max\{K - S, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

- Lembremos a EDP de uma Put Européia:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial S}(r-\delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rp = 0$$

- Condição Final:

$$p(S,T) = g(S) = \max\{K-S,0\}$$

- Condições de Contorno:

$$p(0,T) = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{e} \quad p(\infty,t) = 0$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

- Lembremos a EDP de uma Put Européia:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial S}(r - \delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rp = 0$$

- Condição Final:

$$p(S,T) = g(S) = \max\{K - S, 0\}$$

- Condições de Contorno:

$$p(0,T) = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{e} \quad p(\infty, t) = 0$$

Como uma opção americana pode ser exercida a qualquer instante, ausência de arbitragem implica : $P(S,t) \geq \max\{K - S, 0\}, \;\; \forall t \in [0,T]$.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EP} tal que:

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EP} tal que:

- Se $S_t \leq S_t^{EP}$, o exercício inmediato é ótimo e

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EP} tal que:

- Se $S_t \leq S_t^{EP}$, o exercício inmediato é ótimo e

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}$$

- Se $S_t > S_t^{EP}$, o exercício inmediato não é ótimo e

$$P(S_t, t) > \max\{K - S_t, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EP} tal que:

- Se $S_t \leq S_t^{EP}$, o exercício inmediato é ótimo e

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}$$

- Se $S_t > S_t^{EP}$, o exercício inmediato não é ótimo e

$$P(S_t, t) > \max\{K - S_t, 0\}$$

- S_t^{EP} é o maior valor do ativo no tempo t para o qual

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EP} tal que:

- Se $S_t \leq S_t^{EP}$, o exercício inmediato é ótimo e

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}$$

- Se $S_t > S_t^{EP}$, o exercício inmediato não é ótimo e

$$P(S_t, t) > \max\{K - S_t, 0\}$$

- S_t^{EP} é o maior valor do ativo no tempo t para o qual

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}$$

Similarmente para uma call$\longrightarrow$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EC} tal que:

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EC} tal que:

- Se $S_t \geq S_t^{EC}$, o exercício inmediato é ótimo e
$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EC} tal que:

- Se $S_t \geq S_t^{EC}$, o exercício inmediato é ótimo e
$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$
- Se $S_t < S_t^{EC}$, o exercício inmediato não é ótimo e
$$C(S_t, t) > \max\{S_t - K, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EC} tal que:

- Se $S_t \geq S_t^{EC}$, o exercício inmediato é ótimo e
$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$
- Se $S_t < S_t^{EC}$, o exercício inmediato não é ótimo e
$$C(S_t, t) > \max\{S_t - K, 0\}$$
- S_t^{EC} é o maior valor do ativo no tempo t para o qual
$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Em cada $t \leq T$, existe um valor do ativo S_t^{EC} tal que:

- Se $S_t \geq S_t^{EC}$, o exercício inmediato é ótimo e
$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$
- Se $S_t < S_t^{EC}$, o exercício inmediato não é ótimo e
$$C(S_t, t) > \max\{S_t - K, 0\}$$
- S_t^{EC} é o maior valor do ativo no tempo t para o qual
$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$

As fronteiras ou Limites de exercício:

$t \rightarrow S_t^{EP}$ e $t \rightarrow S_t^{EC}$, (são desconhecidas a priori!)

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S,

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S, i.e., Δ é continuo.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S, i.e., Δ é continuo.

- Se $S \leq S^{EP}$, então $P(S) = K - S$, daqui $\lim_{S \to S_{-}^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S} = -1$.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S, i.e., Δ é continuo.

- Se $S \leq S^{EP}$, então $P(S) = K - S$, daqui $\lim_{S \to S_-^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S} = -1$. Agora o limite pela direita $\lim_{S \to S_+^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S}$ pode ser >-1,<-1 ou -1.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S, i.e., Δ é continuo.

- Se $S \leq S^{EP}$, então $P(S) = K - S$, daqui $\lim_{S \to S_{-}^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S} = -1$. Agora o limite pela direita $\lim_{S \to S_{+}^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S}$ pode ser >-1,<-1 ou -1.
- Se $\Delta < -1$, um pequeno mov. $dS > 0$ faria seu preço cair abaixo do seu valor intrinseco. Porem, isto é impossível, pois $P(S + dS) > K - (S + dS)$.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S, i.e., Δ é continuo.

- Se $S \leq S^{EP}$, então $P(S) = K - S$, daqui $\lim_{S \to S^{EP}_{-}} \frac{\partial p}{\partial S} = -1$. Agora o limite pela direita $\lim_{S \to S^{EP}_{+}} \frac{\partial p}{\partial S}$ pode ser >-1,<-1 ou -1.
- Se $\Delta < -1$, um pequeno mov. $dS > 0$ faria seu preço cair abaixo do seu valor intrinseco. Porem, isto é impossível, pois $P(S + dS) > K - (S + dS)$.
- Se $\Delta > -1$ também é impossível, pois geraria oportunidades de arbitragem.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Quando S toca a barreira S^{EP}, a função preço deve ter uma derivada continua w.r.t. S, i.e., Δ é continuo.

- Se $S \leq S^{EP}$, então $P(S) = K - S$, daqui $\lim_{S \to S_-^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S} = -1$. Agora o limite pela direita $\lim_{S \to S_+^{EP}} \frac{\partial p}{\partial S}$ pode ser >-1,<-1 ou -1.
- Se $\Delta < -1$, um pequeno mov. $dS > 0$ faria seu preço cair abaixo do seu valor intrinseco. Porem, isto é impossível, pois $P(S + dS) > K - (S + dS)$.
- Se $\Delta > -1$ também é impossível, pois geraria oportunidades de arbitragem. Daqui devemos ter $\Delta = -1$ em $S = S^{EP}$. Esta condição é conhecida como *high contact condition* ou *smooth pasting condition.*

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Put Americana satisfaz para $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq S \leq \infty$:

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Put Americana satisfaz para $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq S \leq \infty$:

- Para $S \leq S_t^{EP}$, $P(S,t) = K - S$,

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Put Americana satisfaz para $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq S \leq \infty$:

- Para $S \leq S_t^{EP}$, $P(S,t) = K - S$,
- O contorno livre S_t^{EP} é caracterizado por:

$$P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP} \text{ e } \frac{\partial p}{\partial S} = -1$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Put Americana satisfaz para $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq S \leq \infty$:

- Para $S \leq S_t^{EP}$, $P(S,t) = K - S$,
- O contorno livre S_t^{EP} é caracterizado por:

$$P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP} \text{ e } \frac{\partial p}{\partial S} = -1$$

- Para $S > S_t^{EP}$: $P(S,t)$ resolve:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S}(r - \delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rP = 0$$

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Put Americana satisfaz para $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq S \leq \infty$:

- Para $S \leq S_t^{EP}$, $P(S,t) = K - S$,
- O contorno livre S_t^{EP} é caracterizado por:

$$P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP} \text{ e } \frac{\partial p}{\partial S} = -1$$

- Para $S > S_t^{EP}$: $P(S,t)$ resolve:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S}(r - \delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rP = 0$$

$P(S,t) > \max\{K - S, 0\}, t < T$ e $P(S,T) = \max\{K - S, 0\}$.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Put Americana satisfaz para $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq S \leq \infty$:

- Para $S \leq S_t^{EP}$, $P(S,t) = K - S$,
- O contorno livre S_t^{EP} é caracterizado por:

$$P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP} \text{ e } \frac{\partial p}{\partial S} = -1$$

- Para $S > S_t^{EP}$: $P(S,t)$ resolve:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S}(r-\delta)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rP = 0$$

$P(S,t) > \max\{K-S,0\}, t < T$ e $P(S,T) = \max\{K-S,0\}$.

- O contorno fixo: $P(\infty,t) = 0$.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Similarmente para a call Americana com dividendos.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Similarmente para a call Americana com dividendos.

Os problemas de contorno livre não tem solução fechada.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Similarmente para a call Americana com dividendos.

Os problemas de contorno livre não tem solução fechada.

- A principal dificuldade esta no fato do contorno livre ser desconhecido e deve ser determinado como parte da solução, tornando o problema, para T finito, num problema bidimensional.

Opções Americanas: Problema sem Contorno

Similarmente para a call Americana com dividendos.

Os problemas de contorno livre não tem solução fechada.

- A principal dificuldade esta no fato do contorno livre ser desconhecido e deve ser determinado como parte da solução, tornando o problema, para T finito, num problema bidimensional.
- Mesmo usando todas as hipóteses do modelo B&S, não temos solução fechada.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Existe uma equivalência entre os problemas de contorno livre e os de parada ótima:
Van Moerbeke, P. (1976). “On Optimal Stopping and Free Boundary Problems”. *Arch. Rational Mech. Analysis* **60**, 101-148.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Existe uma equivalência entre os problemas de contorno livre e os de parada ótima:
Van Moerbeke, P. (1976). “On Optimal Stopping and Free Boundary Problems”. *Arch. Rational Mech. Analysis* **60**, 101-148.

Pode-se mostrar que sob as hipótese do modelo B&S temos:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Existe uma equivalência entre os problemas de contorno livre e os de parada ótima:
Van Moerbeke, P. (1976). "On Optimal Stopping and Free Boundary Problems". *Arch. Rational Mech. Analysis* **60**, 101-148.

Pode-se mostrar que sob as hipótese do modelo B&S temos:

$$P(S,t) = p(S,t) + \int_t^T \left[rK^{-r(\tau-t)} N\left(-d_2\left(S, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \delta S e^{-\delta(\tau-t)} N\left(-d1\left(S, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\right)\right] d\tau$$

Para $S \geq S_t^{EP}$.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

O preço de uma put Européia é dado por:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

O preço de uma put Européia é dado por:

- $$p(S,t) = K^{-r(T-t)} N\left(-d_2\left(S, T-t, K\right)\right) -$$
  $$-Se^{-\delta(T-t)} N\left(-d1\left(S, T-t, K\right)\right)$$

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

O preço de uma put Européia é dado por:

- $$p(S,t) = K^{-r(T-t)} N\left(-d_2\left(S, T-t, K\right)\right) -$$
  $$-Se^{-\delta(T-t)} N\left(-d1\left(S, T-t, K\right)\right)$$

- $$d_1(S, \tau - t, S_\tau^{EP}) = \frac{\ln(S/S_\tau^{EP}) + (r - \delta + \sigma^2/2)(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}$$

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

O preço de uma put Européia é dado por:

- $$p(S,t) = K^{-r(T-t)} N\left(-d_2\left(S, T-t, K\right)\right) -$$
$$-Se^{-\delta(T-t)} N\left(-d1\left(S, T-t, K\right)\right)$$
- $$d_1(S, \tau - t, S_\tau^{EP}) = \frac{\ln(S/S_\tau^{EP}) + (r - \delta + \sigma^2/2)(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}$$
- $d_2(S, \tau - t, S_\tau^{EP}) = d_1(S, \tau - t, S_\tau^{EP}) - \sigma\sqrt{\tau - t}$

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Interpretação da formula:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Interpretação da formula:

- Em qualquer instante τ entre t(agora) e T(vencimento), a put pode ser exercida.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Interpretação da formula:

- Em qualquer instante τ entre t(agora) e T(vencimento), a put pode ser exercida.
- O exercíco antecipado da ao tenedor da opção o direito de trocar os juros ganhos no preço de exercício pelos dividendos a serem recebidos no ativo.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Interpretação da formula:

- Em qualquer instante τ entre t(agora) e T(vencimento), a put pode ser exercida.
- O exercíco antecipado da ao tenedor da opção o direito de trocar os juros ganhos no preço de exercício pelos dividendos a serem recebidos no ativo.
- Este direito tem valor por que os juros no preço de exercício são sempre maiores que os dividendos a vir para preços acima de S_t^{EP}.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Interpretação da formula:

- Em qualquer instante τ entre t(agora) e T(vencimento), a put pode ser exercida.
- O exercíco antecipado da ao tenedor da opção o direito de trocar os juros ganhos no preço de exercício pelos dividendos a serem recebidos no ativo.
- Este direito tem valor por que os juros no preço de exercício são sempre maiores que os dividendos a vir para preços acima de S_t^{EP}.
- A integral representa o prêmio pelo exercício antecipado

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Determinação do S_t^{EP}:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Determinação do S_t^{EP}:

- Lembre que $P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP}$. Daqui S_t^{EP} é definido implicatmente por:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Determinação do S_t^{EP}:

- Lembre que $P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP}$. Daqui S_t^{EP} é definido implicatmente por:

$$K - S_t^{EP} = p(S_t^{EP}, t) + \int_t^T \Big[rK^{-r(\tau-t)} N\Big(-d_2\left(S_t^{EP}, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\Big)$$

$$- \delta S_t^{EP} e^{-\delta(\tau-t)} N\left(-d1\left(S_t^{EP}, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\right)\Big] d\tau$$

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Determinação do S_t^{EP}:

- Lembre que $P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP}$. Daqui S_t^{EP} é definido implicatmente por:

$$K - S_t^{EP} = p(S_t^{EP}, t) + \int_t^T \Big[rK^{-r(\tau - t)} N\Big(-d_2\left(S_t^{EP}, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\Big)$$

$$- \delta S_t^{EP} e^{-\delta(\tau - t)} N\left(-d1\left(S_t^{EP}, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\right)\Big] d\tau$$

- Com pouco tempo para o vencimento:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

Determinação do S_t^{EP}:

- Lembre que $P(S_t^{EP}, t) = K - S_t^{EP}$. Daqui S_t^{EP} é definido implicatmente por:

$$K - S_t^{EP} = p(S_t^{EP}, t) + \int_t^T \Big[rK^{-r(\tau - t)} N\Big(-d_2\left(S_t^{EP}, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\Big)$$

$$- \delta S_t^{EP} e^{-\delta(\tau - t)} N\left(-d1\left(S_t^{EP}, \tau - t, S_\tau^{EP}\right)\right)\Big] d\tau$$

- Com pouco tempo para o vencimento:

$$\lim_{\tau \to T} S_\tau^{EP} = \begin{cases} K, & \text{se } \delta \leq r \\ \frac{Kr}{\delta}, & \text{se } \delta > r \end{cases}$$

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.
- Esta formula não é de fato de forma fechada. Pois, o contorno livre esta dentro da integral.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.
- Esta formula não é de fato de forma fechada. Pois, o contorno livre esta dentro da integral.
- A formula pode ser resolvida explicitamente só em dois casos:

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.
- Esta formula não é de fato de forma fechada. Pois, o contorno livre esta dentro da integral.
- A formula pode ser resolvida explicitamente só em dois casos: $r = 0$, neste caso $P = p$ e $S_t^{EP} = 0$, e

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.
- Esta formula não é de fato de forma fechada. Pois, o contorno livre esta dentro da integral.
- A formula pode ser resolvida explicitamente só em dois casos: $r = 0$, neste caso $P = p$ e $S_t^{EP} = 0$, e $T = \infty$, isto é a put é perpetua.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.
- Esta formula não é de fato de forma fechada. Pois, o contorno livre esta dentro da integral.
- A formula pode ser resolvida explicitamente só em dois casos: $r = 0$, neste caso $P = p$ e $S_t^{EP} = 0$, e $T = \infty$, isto é a put é perpetua.
- KIM, I.J. (1990): "The Analytic Valuation of American Options". *The Review of Financial Studies*, **No. 3**, 547–572.

Opções Americanas como Problema de Parada òtima

- Se pode obter uma formula analoga para a Call Americana.
- Esta formula não é de fato de forma fechada. Pois, o contorno livre esta dentro da integral.
- A formula pode ser resolvida explicitamente só em dois casos: $r = 0$, neste caso $P = p$ e $S_t^{EP} = 0$, e $T = \infty$, isto é a put é perpetua.
- KIM, I.J. (1990): “The Analytic Valuation of American Options”. *The Review of Financial Studies*, **No. 3**, 547–572.
- JACKA, S.D. (1991): “Optimal stopping and the American put,” *Math. Finance*, 1, No.2, 1–14.

Referências e Extensões

- PESKIR, G. (2003) “On the American Option Problem”, Working Paper No. 150. Center for Analytical Finance. University of AARHUS.

Referências e Extensões

- PESKIR, G. (2003) “On the American Option Problem”, Working Paper No. 150. Center for Analytical Finance. University of AARHUS.
- MORDECKI, E. (2002) “Optimal Stopping and Perpetual Options for Lévy processes,” *Finance and Stochastics*, 4, 473-493

Referências e Extensões

- PESKIR, G. (2003) “On the American Option Problem”, Working Paper No. 150. Center for Analytical Finance. University of AARHUS.
- MORDECKI, E. (2002) “Optimal Stopping and Perpetual Options for Lévy processes,” *Finance and Stochastics*, 4, 473-493
- S. I. Boyarchenko and S. Z. Levendorskii (2002): “Perpetual American Options Under Lévy Processes.”. *SIAM J. Control Optim.*, **vol. 40 No. 6**, 1663–1696.

Referências e Extensões

- PESKIR, G. (2003) "On the American Option Problem", Working Paper No. 150. Center for Analytical Finance. University of AARHUS.
- MORDECKI, E. (2002) "Optimal Stopping and Perpetual Options for Lévy processes," *Finance and Stochastics*, 4, 473-493
- S. I. Boyarchenko and S. Z. Levendorskii (2002): "Perpetual American Options Under Lévy Processes.". *SIAM J. Control Optim.*, **vol. 40 No. 6**, 1663–1696.
- S.Z Levendorskii, "Pricing of the American put under Lévy processes", MaPhySto report, November 2002, Aarhus University.

Referências e Extensões

- GERBER, H. U., and E. S. W. SHIU (1996): "Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options on Two Stocks". *Math. Finance,* **vol. 6, no. 3**, 303–322.

Referências e Extensões

- GERBER, H. U., and E. S. W. SHIU (1996): "Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options on Two Stocks". *Math. Finance,* **vol. 6, no. 3**, 303–322.
- Fajardo, J. and Mordecki, E. (2002). " Pricing Derivatives on Two Lévy Driven Stocks". Working paper IBMEC.