Equilíbrio en Economias Estócasticas con Mercados Incompletos

José Fajardo

IBMEC Business School

INTRODUCIÓN

$$\left.\begin{array}{c}\text{Walras (1874)}\\ \text{Pareto (1896)}\\ \text{Arrow (1951)}\\ \text{Debreu (1952)}\\ \text{McKenzie (1954)}\end{array}\right\}\quad \text{Modelo de Equilíbiro}$$

AXIOMAS DEL MODELO

- Todo agente es racionalmente limitado
- Todo agente actua en interes propio

MODELO DE ARROW-DEBREU

- Economia con Incertidumbre Exogena
- Tiempo discreto
- Mercados Completos
- Mercado sin Friciones
- Dotaciones Inciales Exogenas

COSTOS NO INCLUIDOS

- Costos ex-ante: Costo de Tiempo e esfuerzo para buscar los contratos y detallarlos
- Costos ex-post: Costo Legal por incumplimiento de contratos.

MODELO

Cada agente h resuelve el siguiente problema:

$$\max_{B^h(\pi, w^h)} U^h(x)$$

Donde

$$B^h(\pi, w^h) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{S+1} \;\middle|\; \pi(x - w^h) \leq 0 \right\}$$

Precios de estado

EQUILIBRÍO

Definición 1. *Un equilibrío para la economia* $\mathcal{E} = \{(U^h, \omega^h)_{h \in H}\}$ *con um solo bien, es um par que consiste en uma alocación y un vector de precios:* $((\overline{x}^h)_{h \in H}, \overline{\pi})$ *tal que:*

1. *Los agentes maximizan sus utilidades:*

$$\overline{x}^h \in \arg \max_{B^h(\overline{\pi}, w^h)} U^h(x), \quad h \in H$$

2. *Mercado equilibrados:*

$$\sum_H (\overline{x}^h - w^h) = 0$$

PRINCIPAL RESULTADO

Teorema 1. *La economia $\mathcal{E}$ tiene equilibrío.*

Teorema 2. *El equilibrío es Pareto Eficiente.*

EXTENSIONES DEL MODELO ARROW-DEBREU

Debilitamiento de los Axiomas:

- Asimétrias de Información
- Altruismo

EXTENSIONES DEL MODELO ARROW-DEBREU

Debilitamiento de las Hipótesis:

- Incertidumbre Endogena
- Mercado Financiero con Friciones
- Mercados Incompletos
- Tiempo Continuo

ECONOMIAS EM TEMPO CONTINUO

Mercados Completos

- Huang (1987)
- Dumas (1989)
- Karatzas, Lehoczky and Shreve (1990)

En este caso a utilidad de un agente representativo es construida como uma combinación lineal de las utilidades individuales de los agentes. Usando pesos constantes.

AGENTE REPRESENTATIVO

Para cada vector $\lambda \in \mathbb{R}_+^H$ de pesos de los agentes, defina:

$$U_\lambda(x) = \sup_{(c^1,\ldots,c^H)} \sum_{h=1}^{H} \lambda_h U^h(c^h)$$

Tal que

$$c^1 + \cdots + c^H \leq x.$$

Lema 1. *Suponga que U^h es concava para todo h. Una alocación factíble es Pareto optima si y solamente si existe um vector $\lambda \in \mathbb{R}_+^H \backslash \{0\}$ tal que $(c^1, \ldots, c^H)$ resuelve el problema de alocación del agente representativo con $x = c^1 + \cdots + c^H$.*

ECONOMIAS EM TEMPO CONTINUO

Mercados Incompletos

- Karatzas, Lehoczky, Shreve and Xu (1991)
- Cuoco and He (1994)
- Fajardo (2002, 2003)

En este caso a utilidad de un agente representativo es construida como uma combinación lineal de las utilidades individuales de los agentes. Usando pesos estocásticos.

MODELO

- Horizonte de Tiempo finito T
- Un solo bien de consumo
- Mercado Financiero con $n+1$ activos, uno sin riesgo (Bono) y n con riesgo.

MODELO

Las equaciones que determinan la evolución de los precios de los ativos son:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1, \tag{1}$$

$$dP_i(t) = P_i(t)[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW^j(t)], \quad P_i(0) \in (0, \infty), \forall i \tag{2}$$

Donde $W(t) = (W_t^1, ..., W_t^d)', 0 \leq t \leq T$, es un Movimiento Browniano $d-$dimensional, cada W^i es un Movimento Browniano.

MODELO

$\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimento Browniano standard si:

1. W_t es continuo en t,

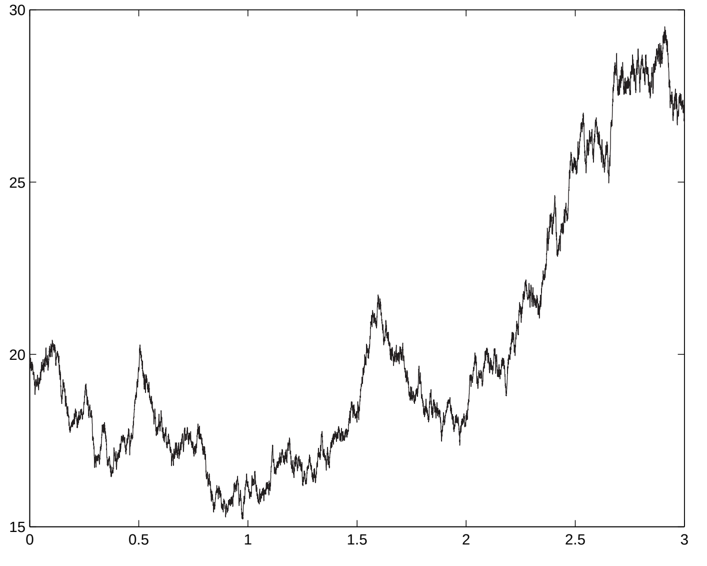
2. Para todo t y $s > t$, $W_s - W_t \sim N(0, s-t)$

3. Para cualquier $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tales que $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, las variables aleatórias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.

Simulemos equación (2) para $d = 1$, $P(0) = 20$, $b = 14\%$, $\sigma = 20\%$ y $\Delta t = 0.01$, entonces

$$\Delta P = 0,0014P + 0,02P\varepsilon$$

Donde $\varepsilon \sim N(0,1)$



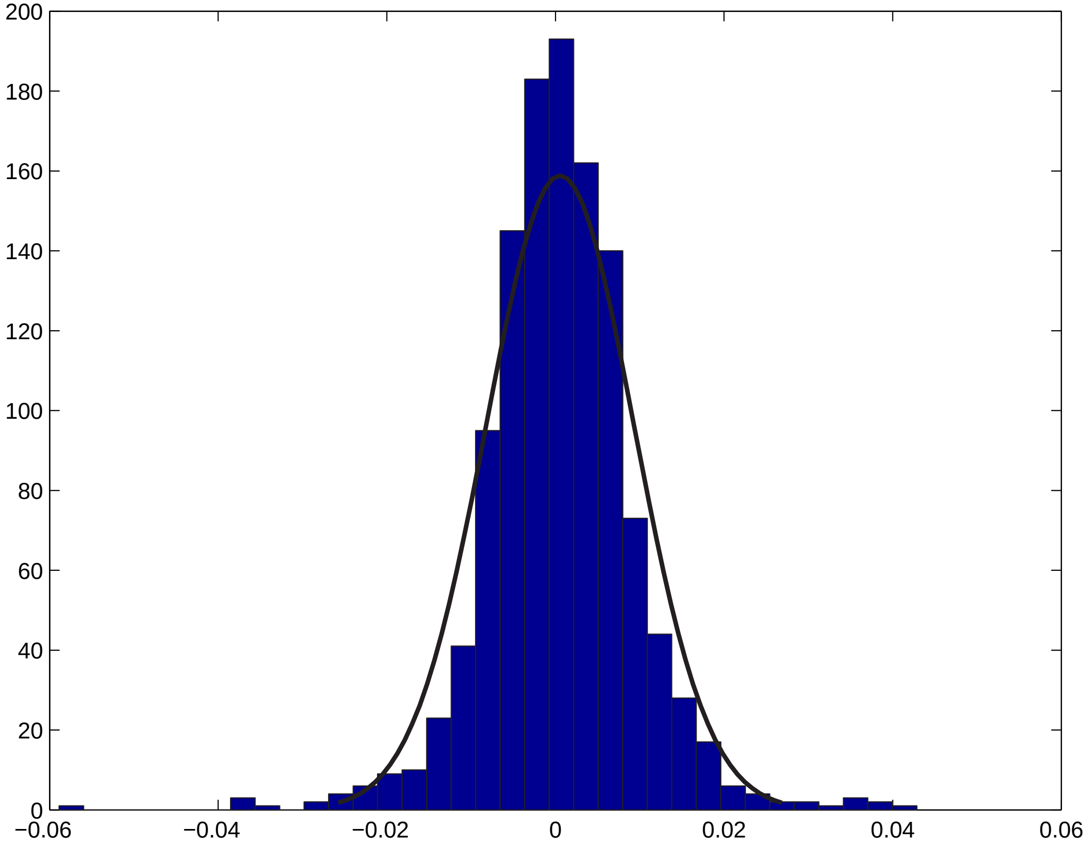


Figura 1: Retornos IGBVL

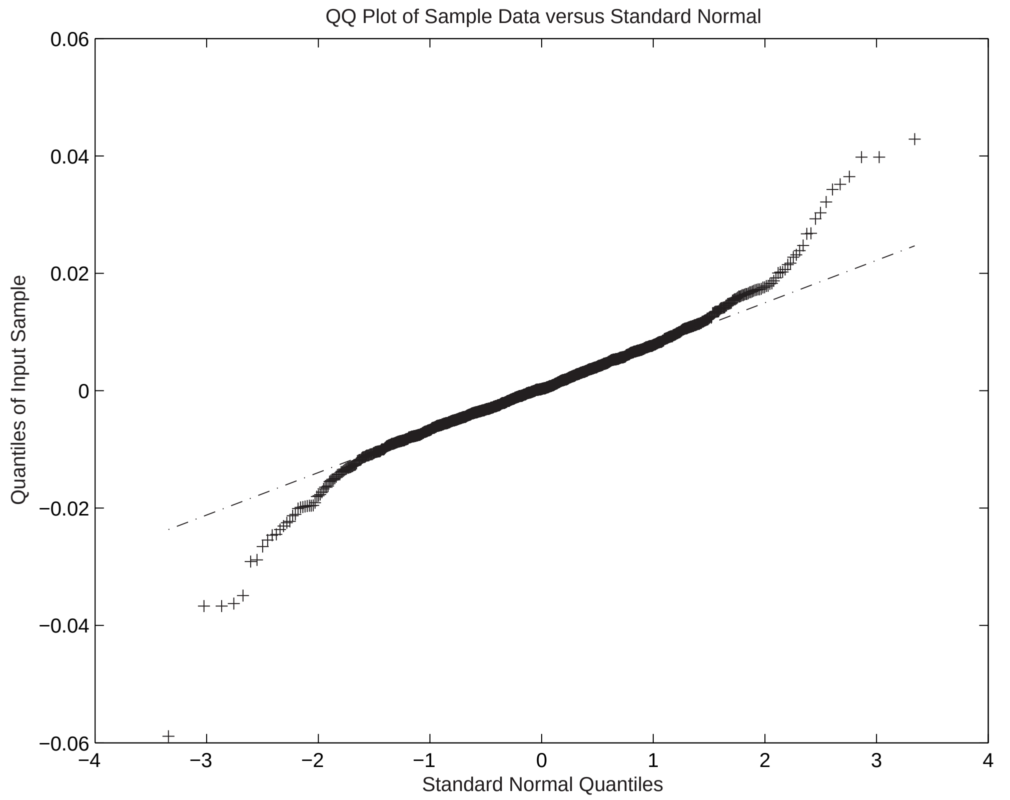


Figura 2: Quantile-Quantile IGBVL

Decisiones Individuales

Todos los agentes de esta economia tienen la misma información representada por **F** y tienen las mismas crencias representedas por **P**. estos agentes son pequeños inversionistas y cada uno de ellos decidira a cada momento $t \in [0, T]$:

1. Cuanto dinero (α, θ) él quiere invertir. Donde $\alpha(t)$ e $\theta(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_n(t))'$ denotan el número de unidades de bonos y activos, respectivamente.

2. Cual será su concumo acumulado $C(t)$.

Decisiones Individuales

El conjunto de estrátegias admisibles será denotado por Θ. Consideramos que existe un número finito de agentes $H \geq 2$. La preferencia de cada inversionista es caracterizada por una función de utilidad aditiva en el tiempo y independiente de los estados

$$U_h(c) = E\left[\int_0^T u_h(c(t), t)dt\right], h \in \{1, .., H\}.$$

Hipótesis *Las funciones* $u_i(\cdot, t)$ *son estrictamente crescientes, estrictamente concavas y tres vezes continuamente diferenciables en* $(0, \infty)$ *para toda* t. *Mas aún, satisfazen la condición de Inada*

Decisiones Individuales

Cada inversionista h esta dotado de un proceso de dotación $e_h > 0, \ e_h \neq 0$. Denotemos *el proceso de dotación agregado*, por "e", *i.e.*

$$e = \sum_{h=1}^{H} e_h,$$

Hipótesis *El proceso "e" es un proceso de Ito,*

$$de(t) = \mu(t)dt + \rho(t)dW_t,$$

Mas aún, existen constantes $0 < e' \leq e''$ tal que

$$e' \leq e(t) \leq e'' \ \ \forall t \in [0, T].$$

Decisiones Individuales

Denotaremos por $\mathcal{E} = (\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \sigma, \{u_h, e_h\}_{h=1}^{H})$ las primitivas de la economia, y $\mathcal{P} = (r, b)$ seran parametros definiendo el proceso de precios de los ativos. Nos referiremos a $\mathcal{E}$ como *la economia* y a $\mathcal{P}$ como *el sistema de precios*.

Dado el sistema de precios $\mathcal{P}$ cada inversionista h escoge su proceso de consumo c_h y una estrátegia admisible $(\alpha_h, \theta_h) \in \Theta$, tal que $\alpha_h(0) = 0,\ \theta_h(0) = 0$,

Decisiones Individuales

$$X_h(t) = \int_0^t \alpha_h(s)dB(s) + \int_0^t \theta'_h(s)dP(s) - \int_0^t (c_h(s) - e_h(s))ds, \tag{7}$$

$$X_h(t) \geq -\mathcal{K}B(t), \tag{8}$$

$$X_h(T) \geq 0, \tag{9}$$

Decisiones Individuales

Definición 2. *Dado el sistema de precios $\mathcal{P}$, un proceso de consumo $c_h \in \mathcal{C}$ es factible con la dotación e_h si existe uma estratégia admissible $(\alpha_h, \theta_h) \in \Theta$ tal que (7)-(9) son satisfechas. Entonces, decimos que (α_h, θ_h) financia c_h.*

Precios

Para qualquier sistema de precios $\mathcal{P}$ definamos *el proceso premio por riesgo estandarizado.*

$$\eta_0 = -\sigma'(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}\left(b(t) - r(t)\mathbf{1}\right), \qquad (10)$$

y el proceso exponencial

$$Z_0(t) = exp\left(\int_0^t \eta_0'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\eta_0(s)\right|^2 ds\right), \qquad (11)$$

Medida martingala equivalente

Definición 3. *Un sistema de precios $\mathcal{P} = (r, b)$ es admisible si:*

a) El proceso taza de interes satisface

$$\int_0^t |r(s)|ds < \infty, \tag{12}$$

para todo $t \in [0, T]$ y existe una constante $K_1 > 0$ tal que

$$\int_0^T r(t)^- dt < K_1, \tag{13}$$

b) proceso premio por riesgo estandarizado η_0 *de (10) satisface a condición de Novikov:*

$$E\left[exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\eta_0(t)|^2 dt\right)\right] < \infty, \tag{14}$$

c) Existe una única solución fuerte para la equación integral estócastica (2).

Equilíbrio

Definición 4. *Un equilíbrio de expectativas racionales para la economia $\mathcal{E}$ es un sistema de precios admissible $\mathcal{P}$ y un conjunto $\{c_h, (\alpha_h, \theta_h)\}$ de consumo y estratégias admisibles tal que;*

(i) c_h maximiza U_h en $\mathcal{B}(e_h, \mathcal{P}) \cap \mathcal{C}_h$

(ii) (α_h, θ_h) financia c_h

(iii) Mercados equilibrados, i.e.

$$\sum_{h=1}^{H} \alpha_h = 0, \quad \sum_{h=1}^{H} \theta_h = 0, \quad y \quad \sum_{h=1}^{H} c_h = e.$$

Políticas Optimas

Suponga que los mercados seam completos $(n = d)$. En este caso el problema de maximizar utilidad esperada suujeto a las restriciones (7)-(9) es equivalente al problema de maximizar utilidad sujeto a la restrición Arrow-Debreu :

$$E\left[\int_0^T \gamma(t) Z_0(t)\left(c(t) - e_k(t)\right) dt\right] \leq 0, \qquad (15)$$

Luego $H_0(\cdot) = \gamma(\cdot)Z_0(\cdot)$ es la única densidad de precios de estado para la economia.

Políticas Optimas

Sabemos que si la solución optima c_{h0} del problema del agente h existe, entonces este satisface la condición de primera orden:

$$u_{hc}(c_{h0}(t), t) = \psi_h H_0(t), \tag{16}$$

para algun multiplicador de Lagrange ψ_h tal que (15) es satisfecho como igualdad.

Para el caso de mercados incompletos necesitamos estender la noción de medida martingala equivalente.

Políticas Optimas

Para cada $\nu \in K(\sigma) = \left\{\xi \in \mathcal{L}^2 : \sigma\xi = 0 \ (P \times l) - a.e\right\}$, definamos $\eta_\nu(t) = \eta_0 + \nu(t)$, entonces el proceso exponencial

$$Z_\nu(t) = exp\left(\int_0^t \eta_\nu'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\eta_\nu(s)|^2 ds\right), \qquad (17)$$

esta bien definido y es um martingala local continuo y estrictamente positivo. Denotemos por $\mathcal{N}$ o conjunto de $\nu \in K(\sigma)$ para el cual el proceso Z_ν es un martingala uniformemente integrable.

Políticas Optimas

Proposición 1. *Una medida de probabilidad Q es una medida martingala localmente equivalente si y solamente si $\frac{dQ_t}{d\mathbf{P}_t} = Z_\nu(t)$ para algun $\nu \in \mathcal{N}$ y $\forall t \in [0,T]$, donde $\mathbf{P}_t(Q_t)$ denota a restrición de $\mathbf{P}(Q)$ a $\mathcal{F}_t$.*

Con esto podemos caracterizar las densidades de precios de estado.

Lema 2. *Se c_h es factible para la dotación e_h, entonces*

$$E\left[\int_0^T H_\nu(t)(c_h(t)-e_h(t))dt\right] \le 0, \forall \nu \in \mathcal{N}, \qquad (18)$$

donde $H_\nu(\cdot) = \gamma(\cdot)Z_\nu(\cdot)$. Reciprocamente, sea $c_h \in \mathcal{C}_h$ e suponga que existe $\nu_h \in \mathcal{N}$ talque

$$E\left[\int_0^T H_\nu(t)(c_h(t)-e_h(t))dt\right] \le E\left[\int_0^T H_{\nu_h}(t)(c_h(t)-e_h(t))dt\right] = 0, \qquad (19)$$

$\forall \nu \in \mathcal{N}$. Entonces c_h es factible para la dotación e_h.

Políticas Optimas

El anterior Lema nos indica que el problema de optimización puede ser reformulado como el problema de maximización de la utilidad esperada sujeta a las restriciones presupuestarias asociadas a las densidades H_ν with $\nu \in \mathcal{N}$.

Usando el Lema de Ito tenemos que el conjunto $\{H_\nu : \nu \in \mathcal{N}\}$ es convexo, de aqui el gradiente de la utilidad del agente h en la solución optima será proporcional a la densidad de precios de estados H_{ν_h} con $\nu_h \in \mathcal{N}$.

Esto implica que la solución del problema de consumo individual del agente h coincide con la solución del problema de maximizar utilidad esperada del proceso de consumo $c_h \in \mathcal{C}_h$ satisfaciendo la restrición

$$E\left[\int_0^T H_{\nu_h}(t)(c_h(t) - e_h(t))dt\right] \leq 0.$$

A solución será dada por

$$c_{\nu_k}(t) = f_k\left(\psi_k H_{\nu_k}(t), t\right), \tag{21}$$

Agente Representativo

Vamos construir la función de utilidad U tal que $(\mathcal{P}, e)$ es un equilibrio sin negocios para la economia de un agente $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}), \sigma, U, e)$.

Defina la función $u(c, \lambda, t) : (0, \infty) \times (0, \infty)^H \times [0, T] \to I\!R$ por

$$u(c, \lambda, t) = \max_{\sum_{h=1}^{H} c_h = c} \left[\sum_{h=1}^{H} \lambda_h u_h(c_h, t) \right] \tag{30}$$

La solución del problema de alocación (30) es

$$c_h = f_h \left(\frac{u_c(c, \lambda, t)}{\lambda_h}, t \right), \quad \forall h \in \{1, ..., H\}. \tag{31}$$

Agente Representativo

Mostremos que cualquier equilíbrio da economia puede ser suportado por un agente representativo con la siguiente función de utilidad dependiente del estado.

$$U(c, \lambda) = E\left[\int_0^T u(c(t), \lambda(t), t)\, dt\right],$$

con u dada por (30) y λ un proceso adaptado.

Agente Representativo

Proposición 2. *suponga que* $(\mathcal{P}, \bar{c}_1, .., \bar{c}_H)$ *es un equilíbrio para la economia* $\mathcal{E}$*. Entonces existe un proceso continuo e adaptado* λ *tal que el proceso de dotación agregada "e" maximiza* $U(c, \lambda)$ *sobre* $\mathcal{B}\left(\sum_{h=1}^{H} e_h, \mathcal{P}\right)$ *e las políticas de equilíbrio* $(\bar{c}_1, .., \bar{c}_H)$ *resuelven el problema de alocación del agente representativo en (30) con* $c = e(t)$ e $\lambda = \lambda(t)$ *para todo* $t \in [0, T]$*. Con*

$$\lambda_h(t) = \frac{\psi_1 H_{\nu_1}(t)}{\psi_h H_{\nu_h}(t)}, \ \forall \ \ h \in \{1, .., H\}, \tag{34}$$

donde H_{ν_h} *es la densidad de precios de estado para el agente* h*.*

Agente Representativo

Teorema 3. *Suponga que* $(\mathcal{P}, \bar{c}_1, .., \bar{c}_H)$ *es un equilíbrio para la economia* $\mathcal{E}$. *Defina la utilidad del agente representativo y el proceso* λ *como en la Proposición 2. Entonces el sistema de precios de equilíbrio* $\mathcal{P} = (r, b)$ *y la política de consumo son dadas en terminos de* λ *por*

$$r(t) = -\mathcal{G}u_c(e(t), \lambda(t), t) + u_{ct}(e(t), \lambda(t), t)u_c(e(t), \lambda(t), t),$$

$$b(t) = r(t)\mathbf{1} - \frac{u_{cc}(e(t), \lambda(t), t)}{u_c(e(t), \lambda(t), t)}\sigma(t)\rho(t),$$

$$\bar{c}_h(t) = f_h\left(\frac{u_c(e(t), \lambda(t), t)}{\lambda_h(t)}, t\right),$$

Y las densidades de precios de estados de los H agentes estan relacionadas en equilíbiro por

$$\sum_{h=2}^{H}(\nu_1(t)-\nu_h(t))\lambda_h(t)u_{c\lambda_h}(t)=u_c(t)\nu_1(t)-u_{cc}(t)L(t)\rho(t),$$

donde $L(t)=I-\sigma''(t)(\sigma(t)\sigma''(t))^{-1}\sigma(t)$ *y* I *denota la matriz identidad* $n\times n$*.*

Conclusiones

- Agente Representativo com Pesos Estocásticos
- Equilíbrio
- Costos de Transación
- Restricones de Crédito
- Inadimplencia

http://professores.ibmecrj.br/pepe