# Black-Scholes -Merton Model

José Fajardo
FGV/EBAPE

5 de maio de 2019

# Capítulo 1

# Modelo de Black e Scholes

## 1.1 Um pouco de Hístoria

O modelo que apresentaremos a continuação teve suas raiçes no modelo pioneiro de Louis Bachelier (1900), quem no día 29 de Março de 1900 na Faculté des Sciences de París, defendeu sua dissertação de Doutorado intitulada "*Théorie de la spéculation*", na qual ele sugere um processo Browniano aritmetico para modelar os preços dos ativos. Cabe destacar que esta tese foi desenvolvida sob a orientação do celebre matemático Henri Poincaré. Apartir deste brilhante trabalho forám desenvolvidos varios modelos que tratarám de explicar o comportamento dos preços dos ativos do Mercado Financeiro.

Varios anos pasarám até que forám descubertos estos primeiros trabalhos. Foi na década do 50 com o desenvolvimento do cáculo estócástico que se pudo entender e aplicar com sucesso as ideias de Bachelier. E aqui que aparece a figura do Premio Nobel Paul Samuelson quem na década do sessenta sugere o seguinte modelo: Imaginemos que estamos no tempo $t$ e queremos ver como variaria o preço se o tempo avanzasse um $\Delta t$

$$S_t \xrightarrow[\Delta t]{} S_{t+\Delta t}$$

Daqui

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$$

Agora daqui temos a taxa de retorno $R_t = \frac{\Delta S_t}{S_t}$, esta taxa tem que ter duas compoentes: uma componente deterministica e uma aleatória.

- A parte deterministica é conhecida, isto é se a taxa de crescimento for $\mu$, então:
$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\mu \Delta t} \approx S_t(1 + \mu\Delta t)$$
Daqui obtemos que
$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t \approx S_t \mu \Delta t$$
fazendo $\Delta t \to 0$ teriamos
$$dS_t = S_t \mu dt$$

- A parte aleatória será modelada por um movimento Browniano standard $\{B_t\}_{t\geq 0}$, lembrando:
  1. $B_{t+\Delta t} \sim N(B_t, \Delta t)$ Daqui $B_{t+\Delta t} - B_t \sim N(0, \Delta t)$
  2. Por último fazendo $\Delta \to 0$, temos que $dB_t \sim \sqrt{dt}N(0,1)$.

  Agora para considerar uma variabilidade maior nos retornos usaremos a volatilidade $\sigma$, a párte aleatória será
$$\frac{dS_t}{S_t} \sim \sigma\sqrt{dt}N(0,1) \sim \sigma dB_t$$

Desta duas componentes obtemos o modelo de Samuelson para os preços:
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t B_t, \tag{1.1}$$

**Exemplo:**
Podemos simular o caminho de um preço, tome $S_0 = 40,\ \mu = 0,2,\ \sigma = 0,3$ e $\Delta t = 0,001$, então
$$\Delta S = 0,0014S + 0,02S\varepsilon \tag{1.2}$$
onde $\varepsilon \sim N(0,1)$

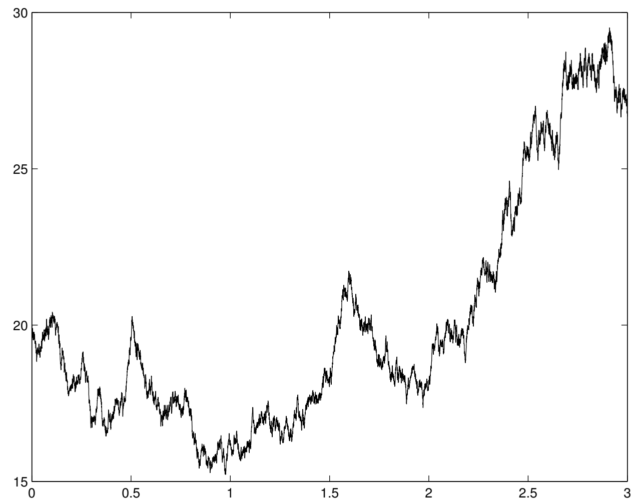


Figura 1.1: Simulação da equação (1.2)

**Observação:**
Este modelo foi depois geralizado para funções mais gerais no $\mu$ (drift) e $\sigma$ (volatilidade):

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)B_t$$

A partir daqui Black e Scholes analisaram o valor de um opção de compra, isto é um derivativo que te da o direito mais não a obrigação de comprar um ativo numa determinada data (maturidade) a um determinado preço (preço de exercício), que tivesse como ativo subjacente um ativo, cujo preço fosse modelado pela equação (1.1), como resultado deste análise eles obtiveram uma formula que da o preço da opção de compra. A continuação apresentaremos a formula. O mesmo análise pode ser usado para derivativos do tipo contingente, isto é cujo retorno acontece numa determinada data no tempo.

## 1.2 Derivação da Equação de Black e Scholes

Nesta seção mostraremos duas formas diferentes de obter a Equação de Black e Scholes:

### 1.2.1 Carteira Equivalente

Nesta parte apresentaremos a metódolgia usada por Fischer Black e Myron Scholes (1973), na qual eles usaram a ideia de *preço racional*, isto é qual sería único valor que podería satisfazer a seguintes condições:

1. Qualquer investidor que no lugar de aquirir a opção aplique este valor num ativo com risco e num ativo sem risco, poderia gerenciar sua carteira deacordo com uma estrátegia autofinanciada, isto é sem investir mais dinheiro duarante a vida da opção, de maneira a obter o mesmo retorno da opção na maturidade,

2. Se a opção fosse oferecida a outro preço diferente, existiriam oportunidades de arbitragem , isto é ganhos sem o risco de perda associado.

Para determinar este valor escolheamos uma estrategia autofinanciada $(\alpha(t), \beta(t))$ onde $\alpha(t)$ é a posição no ativo com risco $S(t)$ cuja equação é dada por (1.1) e $\beta(t)$ é a posição no ativo sem risco $P(t)$ cuja equaçãoe dada pela equação:

$$dP(t) = rP(t)dt$$

Isto é o ativo sem risco tem taxa de retorno constante $r$ capitalizada continuamente. Associada a esta estrátegia temos um processo valor $V$ que determinara o valor da carteira no tempo, assim assumiremos que esta $V$ será função do preço do ativo com risco e do tempo que falta para o vencimento da opção, isto existirá uma $f$ talque:

1. $V_t = f(S_t, T - t)$

2. $f \in C^{2,1}((0, \infty) \times (0, T])$

3. $f(x, 0) = (x - K)^+ = \max\{0, x - K\}$

Aqui $T$ é a maturidade da opção e $K$ é o preço de exercício. Agora se denotamos por $f_x$ and $f_{xx}$ a derivadas parciais em relação a $x$ e por $f_s$ a derivada parcial em relação ao segundo argumento, aplicando a formula de Ito teremos:

$$V_t - V_0 = \int_0^t f_x(S_u, T-u) dS_u - \int_0^t f_s(S_u, T-u) du + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_u^2 f_{xx}(S_u, T-u) du, \ \forall t.$$

Por outra parte $V$ é o valor da carteira autofinanciada, então ela deve ser igual a:

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t P_t \ \text{ e } \ V_t = V_0 + \int_0^t \alpha_u dS_u + \int_0^t \beta_u dP_u \ \ \forall t,$$

comparando os integrandos de $V_t - V_0$ da parte $dS_u$, obtemos:

$$\alpha_t = f_x(S_t, T-t), \ \forall t, \tag{1.3}$$

e do fato de

$$\beta_t = \frac{V_t - \alpha_t S_t}{P_t} = \frac{f(S_t, T-t) - \alpha_t S_t}{P_t}, \ \forall t$$

temos que $\beta_u dP_u = r\beta_u P_u du = r(f(S_u, T-u) - \alpha_u S_u)$, daqui comparando os elementos de $V_t - V_0$ da parte $du$ e usando (1.3), obtemos:

$$r(f(S_t, T-t) - S_t f_x(S_t, T-t)) = -f_s(S_t, T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(S_t, T-t)$$

Esta equação será satisfeita se $f$ cumpre a seguinte equação:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x_t^2 f_{xx} + rxf_x - rf - f_s = 0. \tag{1.4}$$

Esta equação é conhecida como a equação diferêncial parcial de Black e Scholes. Antes de passar a obter a solução desta equação, pasaremos a mostrar outra forma de encontrar esta equação.

### 1.2.2 Carteira de Risco Neutro

Agora construiremos uma carteira de risco neutro, isto é cujá taxa de retorno seja a tax do ativo sem risco, isto é $r$. Mais uma vez pela formula de Ito temos que:

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 S^2\Big)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma S dB_t \tag{1.5}$$

Agora construiremos a seguinte carteira:

1. -1 opção (vendi uma opção)
2. $\frac{\partial f}{\partial S}$ unidades do ativo.

Seja $V$ o valor desta carteira, então como f é o preço da opção, temos:

$$V = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S, \tag{1.6}$$

a variação deste valor no tempo será:

$$\Delta V = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

substituindo as versões continuas (1.5) e (1.1):

$$dV = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt$$

Como esta expresão no involve $B_t$, esta carteira possue retorno sem risco, então:

$$dV = rV dt$$

Igualando os valotres de $V$ nas duas ultimas equações é usando (1.6), temos:

$$\left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) = r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right)$$

ordenando a equação:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{dS} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \tag{1.7}$$

A principal diferença entre a equação obtida em (1.4) e a equação (1.7) esta em que a função considerada em (1.7) é $f(S,t)$ é não $f(S, T-t)$, assim o único que muda é o sinal da derivada parcial em relação ao tempo $f_t$. As derivadas parciais em relção ao primer argumento $x$ é o mesmo que a derivada em realção a $S$.

Agora para encontrar a solução da equação de Black e Scholes necesitaremos da condição de contorno: $f(x, 0) = (x - K)^+$ ou $f(x, T) = (x - K)^+$, dependerá de qual seja o segundo argumeto $T - t$ ou $t$, respectivamente. O importante é que o valor da carteira na maturidade seja igual ao retorno da opção.

## 1.3 Formula de Black e Scholes

Nesta seção mostraremos três formas de obter a formula de Black e Scholes.

### 1.3.1 Metódo de Merton

Embora na literatura a formula que vamos a derivar seja conhecida como formula de Black e Scholes, foi Merton (1973), quem tambem simultaneamente obteve a mesma formula, assim formula é conhecida por muitos como Formula de Black-Scholes-Merton, motivo pelo qual ele também obteve o premio nobel de economia em 1997. A seguir apresentaremos a forma com ele obteve a formula.

Primeiro linearizaremos a equação diferencial parcial (1.7), ja que aparece um termo $x^2$, para isto faremos a seguinte mudança de variável $y = \log(x)$, daqui temos que

$$\hat{f}(y,t) = f(e^y, T-t) \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}_y(y,t) = f_x(x,t)x, \\ \hat{f}_{yy}(y,t) = x^2 f_{xx}(x,t) + \hat{f}_y(y,t), \end{cases}$$

Daqui a equação (1.7) se transforma em:

$$\frac{1}{2}\hat{f}_{yy}\sigma^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})\hat{f}_y - \hat{f}r - \hat{f}_t = 0$$

As condições de contorno seram:

$$f(0, T-t) = \hat{f}(-\infty, t) = 0 \text{ e } f(x,T) = \hat{f}(e^y, 0) = (e^y - K)^+$$

Agora seja $\varphi$ a função dada pela seguinte expresão:

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y,t) e^{i\xi y} dy$$

esta função é conhecida como a *transformada de Fourier* da função $\hat{f}$. Assumindo que esta integral é limitada e que as condicões de regularidade são satisfeita podemos obter a transformada inversa de Fourier:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t) e^{-i\xi y} d\xi,$$

daqui temos que

1. $\hat{f}_y = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi\varphi(\xi,t)e^{-i\xi y}d\xi$

2. $\hat{f}_{yy} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\varphi(\xi,t)e^{-i\xi y}d\xi$

3. $\hat{f}_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(\xi,t)e^{-i\xi y}d\xi$

substituindo estas expressões na equação linearizada obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( -\frac{\xi^2\sigma^2}{2} - (r - \frac{\sigma^2}{2})i\xi - r \right) \varphi(\xi,t) + \varphi_t(\xi,t) \right] e^{-i\xi y}d\xi = 0, \ \forall y.$$

Como a integral é zero para todo $y$, o integrando tera que ser nulo, logo:

$$-\left[ \frac{\sigma^2}{2}(\xi^2 - i\xi) + r(1 + i\xi) \right] \varphi(\xi,t) = \varphi_t(\xi,t)$$

resolvendo esta equação diferêncial ordinaria, obtemos:

$$\varphi(\xi,t) = \varphi(\xi,0)e^{-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\xi^2 - i\xi) + r(1+i\xi)\right]t}$$

retornando agora à função $\hat{f}$ via transformada inversa de Fourier:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,0)e^{-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\xi^2 - i\xi) + r(1+i\xi)\right]t}e^{-i\xi y}d\xi,$$

mais lembremos que:

$$\varphi(\xi,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z,0)e^{i\xi z}dz$$

incluindo isto na equação do preço da opção, temos:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z,0)e^{-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\xi^2 - i\xi) + r(1+i\xi)\right]t - i(\xi y - \xi z)}d\xi dz,$$

agora faremos a integração em relação a $\xi$, para isto re-escrevamos a equação acima:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z,0)e^{-rt} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\xi^2 - i\xi) + ir\xi\right]t - i(\xi y - \xi z)}d\xi}_{I_\xi} dz,$$

logo esta integral pode ser escrita da seguinte forma:

$$I_\xi = e^{\frac{R^2}{2\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\xi+b)^2} d\xi$$

onde $a = \frac{\sigma\sqrt{t}}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{R}{\sigma\sqrt{2t}}$ e $R = i\left[(y-z) - (\frac{\sigma^2}{2} - r)t\right]$ logo fazendo a seguinte mudança de varíavel $\frac{\eta}{\sqrt{2}} = a\xi + b$, e usando o fato de que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta = \sqrt{2\pi}$, obtemos :

$$I_\xi = \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{R^2}{2\sigma^2 t}}}{\sigma\sqrt{t}}$$

usando a condição de contorno $\hat{f}(z,0) = (e^z - K)^+$, temos:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-rt + \frac{R^2}{2\sigma^2 t}}}{\sigma\sqrt{t}} (e^z - K)^+ dz,$$

agora partimos esta integral em duas:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z>log(K)}^{\infty} \frac{e^{z-rt+\frac{R^2}{2\sigma^2 t}}}{\sigma\sqrt{t}} dz - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{z>log(K)}^{\infty} \frac{e^{-rt+\frac{R^2}{2\sigma^2 t}}}{\sigma\sqrt{t}} dz,$$

façamos a seguinte mudança de varíavel $u = \frac{y-z}{\sigma\sqrt{t}}$ e lembrando que $y = \log(x)$, daqui:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sigma\sqrt{t}}} e^{-u\sigma\sqrt{t} - rt + \frac{-\left[u\sigma\sqrt{t} - (\frac{\sigma^2}{2} - r)t\right]^2}{2\sigma^2 t}} du$$

$$-\frac{Ke^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sigma\sqrt{t}}} e^{\frac{-\left[u\sigma\sqrt{t} - (\frac{\sigma^2}{2} - r)t\right]^2}{2\sigma^2 t}} du,$$

Agora façamos as seguintes mudanças de varíaveis: na primeira integral $v = u + \frac{\sqrt{t}}{\sigma}\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ e na segunda $v = u + \frac{\sqrt{t}}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$, daqui obtemos:

$$\hat{f}(y,t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv - \frac{Ke^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

Lembrando que a função de distribuição acumulada da distribuição Normal standard é $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, temos a formula de Black e Scholes:

$$f(x,T-t) = x\Phi\left(\frac{\log(x/K) + (r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - Ke^{-rt}\Phi\left(\frac{\log(x/K) + (r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

### 1.3.2 Formula de Feynman-Kac

Outra maneira de obter a formula acima é via tecnicas probabilisticas, isto é usando o teorema de Girsanov, sabemos que a equação (1.1) é transformada ao mundo neutro ao risco usando a seguinte mudança: $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, daqui

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \tag{1.8}$$

logo

$$E^Q(S_t^2) = S_0^2 E^Q\left(e^{2rt - \sigma^2 t + 2\sigma W_t}\right)$$

Onde $Q$ é a medida neutra ao risco dada por:

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_t - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} t\right)}. \tag{1.9}$$

Agora sabendo que $S_t$ satisfaz:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Daqui apliquemos a formula de Ito à função $e^{-rt} f(S_t, T-t)$:

$$e^{-rt} f(S_t, T-t) - f(S_0, T) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \int_0^\infty e^{-ru} f_x(S_u, T-u) S_u dW_u + r \int_0^\infty e^{-ru} f_x(S_u, T-u) S_u du \\
&- \int_0^\infty e^{-ru} f_s(S_u, T-u) du - r \int_0^\infty e^{-ru} f(S_u, T-u) du \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^\infty e^{-ru} f_{xx}(S_u, T-u) S_u^2 du
\end{aligned}$$

Como $f$ satisfaz (1.4) a equação acima se reduz a:

$$e^{-rt} f(S_t, T-t) - f(S_0, T) = \sigma \int_0^\infty e^{-ru} f_x(S_u, T-u) S_u dW_u$$

agora se $f_x$ é limitada, como $S_t$ tem variância finita, temos que a integral estocástica em relação a $W_t$ é limitada e tem variância finita, daqui o lado direito da última equação é um martingala, ou seja a esperança em relação a $Q$ é constante, neste caso zero, logo tomando esperança a ambos membros da equação teremos:

$$f(S_0, T) = E^Q\left(e^{-rT} f(S_T, 0)\right) = E^Q\left(e^{-rT}(S_T - K)^+\right)$$

esta é famosa formula de Feynman-Kac. Para chegar a formula de Black e Scholes usaremos a equação de $S_T$ e o fato de $W_T$ ser um movimento Browniano sobre $Q$:

$$f(S_0, T) = S_0 \int_{S_T > K}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T} dQ - K \int_{S_T > K}^{\infty} e^{-rT} dQ$$

logo a segunda integral se transforma em: $Ke^{-rT}Q(S_T > K)$, usando mais uma ves a expressão de $S_T$ temos:

$$f(S_0, T) = S_0 \int_{S_T > K}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T} dQ - Ke^{-rT} Q\left(W_T > -\frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma}\right)$$

Agora como $W_T$ é uma varíavel Normal com média 0 e varíância $\sqrt{T}$ sobre $Q$, temos que $-W_T$ tambem o é, logo $\frac{-W_T}{\sqrt{T}}$ é uma varíavel Normal standar sobre $Q$, daqui:

$$f(S_0, T) = S_0 \int_{S_T > K}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T} dQ - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

agora use argumento similar para obter a outra distribuição acumulada (isto fica como execício):

$$f(S_0, T) = S_0 \Phi\left(\frac{\log(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

### 1.3.3 Aproximação Binomial

Uma outra forma de derivar a formula de Black e Scholes é a via a formula binomial, como foi descrito na capítulo das variáveis aleatórias discretas, o preço de uma call pode ser escrita como:

$$C(t) = \frac{1}{R^{T-t}} \sum_{i=0}^{T-t} b(i, T-t, p)(U^i D^{T-t-i} S_t - K)^+,$$

onde

$$p = \frac{R-D}{U-D} \quad \text{e} \quad b(i,n,p) = \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i}$$

Agota tomemos $t = 0$ e sejá $n$ o número de períodos considerados na árvore, então:

$$C_n := C(0) = \frac{1}{R^n} \sum_{i=0}^{n} b(i,n,p)(U^i D^{n-i} S_0 - K)^+,$$

para desenvolver mais esta formula conseidremos o seguinte número:

$$j = \inf\{i \in I\!N \big/ U^i D^{n-i} S_0 > K\}$$

Se $[\![x]\!]$ denota a parte inteira de $x$ tal que $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$, então temos que:

$$j = \left[\!\!\left[ \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 D}\right)}{\ln(\frac{U}{D})} \right]\!\!\right] + 1$$

Este número é o mínimo de subidas que devem acontecer durantes os $n$ períodos para que a opção este *no dinheiro*, isto é para obter lucro. Daqui:

$$C_n = \frac{1}{R^n} \sum_{i=j}^{n} b(i,n,p)(U^i D^{n-i} S_0 - K),$$

Agora lembremos que $b(i,n,p)$ representa a probabilidade de que uma varíavel aleatória, com distribuição binomial de parametros $n$ e $p$, tome o valor $i$. Agora denotemos por:

$$B(j,n,p) = \sum_{i=j}^{n} b(i,n,p)$$

usando a definição de $p = \frac{R-D}{U-D}$ e a igualdade

$$1 - \frac{pU}{R} = \frac{D - DP}{R}$$

obtemos

$$C_n = S_0 \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{pU}{R}\right)^i \left(\frac{D - Dp}{R}\right)^{n-i} - \frac{K}{R^n} B(j,n,p),$$

$$C_n = S_0 B(j,n,\frac{pU}{R}) - \frac{K}{R^n} B(j,n,p),$$

Agora como temos $n$ períodos e a maturidade é $T$, os períodos terão comprimento $\frac{T}{n}$, logo para conseguir uma approximação para o modelo continuo faremos $n \to \infty$. Por tanto para cada $n$ teremos parametros $U_n, D_n, R_n$ e $p_n$.

Peguemos $R_n = 1 + r_n$ então:

$$\lim_{n\to\infty} (R_n)^n = \lim_{n\to\infty} (1 + r_n)^n = e^{\rho T}$$

onde $\rho$ é a taxa de retorno instantanea. Agora como $S_n(i) = S_0 U_n^i D_n^{n-i}$, temos que:

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = I \ln\left(\frac{U_n}{D_n}\right) + n \ln D_n,$$

onde $I$ é uma variável aleatória com distribuição binomial de parametros $n$ é $q_n$, com $q_n$ sendo a distribuição dada pela natureza de acontecer uma súbida, daqui

1. $E(I) = nq_n$
2. $Var(I) = nq_n(1 - q_n)$

se denotamos por $n\mu_n$ e $n\sigma_n^2$ a esperança e a variância de $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ e seja $S_T$ o preço do ativo na maturidade, temos que

$$\begin{array}{rcl} E\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) & \to & E\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) \\ Var\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) & \to & Var\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) \end{array}$$

como o preço da opção é calculado num mundo neutro ao risco, isto é não depende da probabilidade $q_n$ e sim de $p_n$, podemos escolher $q_n = \frac{1}{2}$. Daqui podemos escolher $U_n$ e $D_n$ de tal forma que $n\mu_n \to \mu T$ e $n\sigma_n^2 \to \sigma^2 T$, onde $\mu$ e $\sigma^2$ representam a média e a variãncia instantanea do retorno do ativo, isto pode ser feito tomando por exemplo:

$$U_n = e^{\mu\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \quad \text{e} \quad D_n = e^{\mu\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \tag{1.10}$$

Agora analizemos o comportamento de

$$C_n = S_0 B\left(j_n, n, \frac{p_n U_n}{(1 + r_n)}\right) - \frac{K}{(1 + r_n)^n} B(j_n, n, p_n),$$

onde

$$j_n = \left[\!\!\left[ \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 D_n}\right)}{\ln(\frac{U_n}{D_n})} \right]\!\!\right] + 1 \quad \text{e} \quad p_n = \frac{(1+r_n) - D_n}{U_n - D_n}$$

Agora $B(j_n, n, p_n) = 1 - P(Y_n < j_n)$ onde $Y_n$ é a soma de $n$ variáveis aleatórias independentes de Bernoulli com parametro $p_n$. Daqui

$$P(Y_n < j_n) = P\left( \frac{Y_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} < \frac{j_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \right)$$

usando a definição de $j_n$ e (1.10), temos que:

$$j_n = \frac{1}{2}n + \frac{\ln(\frac{K}{S_0}) - \mu T}{2\sigma\sqrt{T}} + o(\sqrt{n})$$

e

$$p_n - \frac{1}{2} \approx \frac{\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}}(\rho - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$$

Daqui obtemos que:

$$\frac{j_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \to \frac{\ln(\frac{K}{S_0}) - (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{1.11}$$

Agora para derivar a formula de Black e Scholes usaremos um Teorema de Lindeberg:

**Teorema 1** *Para todo $n$ sejam $(X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n})$ $n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, com distribuição $P(X_{i,n} = 1) = 1 - P(X_{i,n} = 0) = p_n$. Seja $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$. Então:*

$$\frac{Y_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \quad \longrightarrow^{\mathcal{D}} \quad N(0,1)$$

*onde $\longrightarrow^{\mathcal{D}}$ significa convergência em distribuição.*

Agora apliquemos o teorema tomando enconta (1.11), daqui:

$$B(j_n, n, p_n) \longrightarrow^{\mathcal{D}} \quad 1 - \Phi\left( \frac{\ln(\frac{K}{S_0}) - (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Porém como $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$, obtemos

$$B(j_n, n, p_n) \longrightarrow^{\mathcal{D}} \quad \Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Tambem podemos obter resultados analogos para $\widetilde{p}_n = \frac{p_n U_n}{(1+r_n)}$, isto é:

$$\frac{j_n - n\widetilde{p}_n}{\sqrt{n\widetilde{p}_n(1-\widetilde{p}_n)}} \to \frac{\ln(\frac{K}{S_0}) - (\rho + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Daqui,

$$B(j_n, n, \widetilde{p}_n) \longrightarrow^{\mathcal{D}} \quad \Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (\rho + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Por tanto se $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, temos que:

$$C = S_0\Phi(d) - Ke^{-\rho T}\Phi(d - \sigma\sqrt{T})$$

com

$$d = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (\rho + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

que é a formula de Black e Scholes, isto é quando o número de períodos da árvore é muito grande nos aproximamos do valor dado pela formula de Black e Scholes.

# Capítulo 2

# Formula de Ito

Se conhecemos o processo seguido por $S$ qual será o processo seguido por $f(S,t)$? Já que um derivativo é uma função do preço do ativo objeto e do tempo, resolver esta questão seria importante para entender o preço do derivativo. Esta reposta foi dada por Katayoshi Ito para funçõs que sejam duas veces continuamente diferenciaveis no primer argumento e uma vez continuamente diferenciavel no segundo. Sigamos o razonamento dele:

A serie de taylor de $f(x,t)$ sería

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + r$$

Agora como $\Delta t \approx \frac{1}{n}$ então $(\Delta t)^m \approx 0$ quando $m > 1$. Daqui como o termo $\Delta S = \Delta x$ tem desvio padrão $\sqrt{\Delta t}$ então $\Delta x \Delta t$ tem desvio padrão $(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ daqui a variancia approx. zero, por tanto $\Delta x \Delta t$ coincide com sua esperança: zero.

Por tanto a equação acima fica reduzida a:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 \tag{2.1}$$

agora suponhamos que

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dB_t$$

ou

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

onde $\varepsilon \sim N(0,1)$. Substituindo na equação (2.1) e eliminando termos com $(\Delta t)^m,\ m > 1$, obtemos

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\varepsilon^2\Delta t$$

Agora é fàcil provar que $E(\varepsilon^2\Delta t) = \Delta t$ e a variancia é proporcional a $(\Delta t)^2 \approx 0$ por tanto $\varepsilon^2\Delta t \approx \Delta t$, tomando limites na equação temos

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 dt$$

e substituindo $dx = adt + bdB_t$ temos a formula de Ito:

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\Big)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdB_t$$

**Exercícios**

1. Supondo que $dx_t = \mu x_t dt + \sigma x_t dB_t$, aplique a formula de Ito as seguintes funções:
   (a) $f(x,t) = \ln x$
   (b) $f(x,t) = x^2$
   (c) $f(x,t) = \sqrt{x}$
2. Apartir de (1.a) obtenha a solução da equação (**??**)
3. ** Considere qualquer solução $\phi(x)$ da equação:

   $$\frac{1}{2}\phi''(x) + q(x)\phi(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

   onde $q(x)$ é uma função limitada e continua. Mostre que:

   $$M(t) = \phi(B_t)e^{\left[\int_0^t q(B_s)ds\right]},$$

   é um martingala em relação ao filtro gerado pelo movimento Browniano standard $B_t$.
   **Dica:** Aplique a formula de Ito para $\phi(t)$ e $M(t)$ e obtenha:

   $$dM(t) = \phi'(B_t)e^{\left[\int_0^t q(B_s)ds\right]}dB_t$$

# Referências Bibliográficas


[1] Bachelier, L. (1900), " Théorie de la Speculation", *annales Scientifiques de lÉcole Normale Supérieure.* troisième serie 17, 21-88. Translation: *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. Paul Cootner, Cambridge, MA: MIT Press.

[2] Black, F adn Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

[3] Hull, J. (2017), *Options, Futures, and Other Derivatives.* (10th Edition).

[4] Jacod, J. and Protter, P.(2000), *Probability Essentials.* Springer- Verlag.

[5] Karatzas, I. and Shreve, S.(1998), *Mathematical Methods in Finance*

[6] Merton, R.C. (1973), "The Theory of Rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.

[7] A.N. Shirjaev (1998), *Probability.* Springer-Verlag.