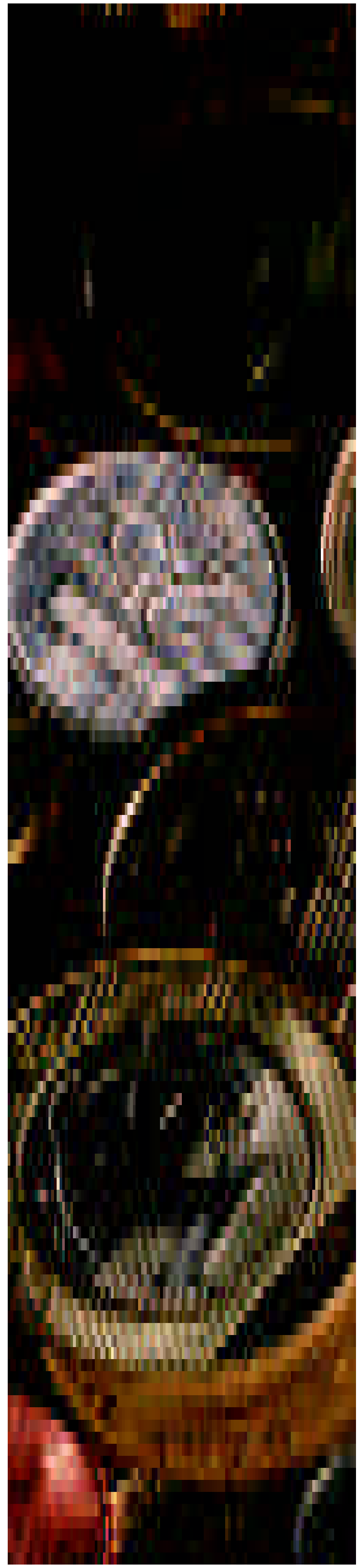
Opções com preço de exercício estocástico: uma abordagem binomial



Hugo Daniel de Oliveira Azevedo
José Santiago Fajardo Barbachan

Neste artigo, apresenta-se modelo de apreçamento de opções que tenham seus resultados atrelados não só à evolução do preço do ativo subjacente, mas também à variação de algum índice de correção de seu preço de exercício, em especial de alguma taxa de câmbio. Para isso, foram classificadas as **fx-linked options** ***e detalhado o médoto sugerido, uma adaptação do modelo binomial de Rubinstein para opções de troca. A seguir, mostra-se exemplo prático para o Brasil, abordando-se opções com preços de exercício corrigido pela variação da taxa de câmbio de real por dólar norte-americano.***

Em seus trabalhos pioneiros, Black e Scholes (1973) e Merton (1973) encontraram uma fórmula fechada para o preço livre de arbitragem de uma opção *vanilla* européia. Desde então, extensões desse modelo têm sido desenvolvidas, em parte com o intuito de enfraquecer as hipóteses irrealistas ou simplificadoras. Extensão natural ocorre quando há mais de dois ativos subjacentes[1], em especial quando o preço de exercício não é determinístico. O caso mais simples desse problema é o das opções de troca, resolvido por Margrabe (1978), o primeiro a obter solução analítica para o problema do apreçamento de uma opção européia de troca de um ativo por outro. Generalizações desse trabalho estão presentes em Stulz (1982) e Johnson (1987), enquanto Boyle (1988), Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e Kamrad e Ritchken (1991) utilizaram a abordagem *lattice* para tratar o mesmo problema e seus similares. Em decorrência desses estudos, surgiu a coleção de trabalhos de Rubinstein (1991–1994) dedicada à avaliação desses tipos de instrumentos. Em um de seus textos, o autor

1 Para uma referência sobre derivativos bidimensionais ver Azevedo (2003).

desenvolve modelo binomial para a razão dos preços dos dois ativos subjacentes. Sua abordagem é um espelho do modelo de Cox, Ross e Rubinstein (1979), podendo ser adaptada para o problema das opções com o preço de exercício corrigido por variação cambial.

Opções com risco cambial ou fx-linked options

As *fx-linked options* ou *currency-translated options*, como também são conhecidas, servem como instrumentos de proteção, em diferentes níveis, contra movimentos adversos em taxas de câmbio assim como preço de ativos. Essa classe de opções invariavelmente envolve um componente de taxa de câmbio cuja função é agir como numerário, isto é, fator de conversão usado para mudar as unidades monetárias de uma moeda para outra. As *fx-linked options* são divididas em três subtipos, relacionados a seguir.

- ***Cross currency***: opções sobre títulos nos quais o prêmio, o preço de exercício e o *payoff* são denominados em moeda diferente da moeda na qual os cupons dos títulos e o principal são pagos. Logo, o *payoff* de uma *cross-currency* é dependente de dois fatores de risco: os preços dos títulos e das taxas de câmbio. O primeiro uso desse tipo de derivativo foi feito por companhias de seguros no Japão que possuíam US Treasury Notes e Bonds em carteiras baseadas em ienes. Esses investidores queriam tanto comprar opções de venda para proteger o valor de suas carteiras como vender opções de compra em programas *buy-write*.
- ***Quanto***: suas aplicações se encontram na aquisição de um ativo em moeda diferente da moeda doméstica do comprador. Claramente, podem-se inferir duas variantes para esse tipo de derivativo, uma com taxa de câmbio fixa e outra com taxa de câmbio flutuante.
  - *Quanto com taxa de câmbio fixa*: o comprador de uma opção em uma ação estrangeira quer que a opção seja exercida na moeda estrangeira, mas prefere que o *payoff* final seja convertido para sua moeda doméstica a uma taxa de câmbio preestabelecida. Assim, o investidor se protege de movimentos adversos na taxa de câmbio, mas simultaneamente deixa de ser favorecido por movimentos de apreciação da moeda doméstica em relação à moeda estrangeira[2]. Então, o *payoff* de uma *quanto* com taxa de câmbio fixa, isto é, previamente estabelecida sobre a ação denominada em moeda estrangeira e exercida na mesma moeda, com o pagamento sendo feito na moeda doméstica é:

$$c(S_E^0,\ S_F,\ K_F) = S_E^0\,(S_F - K_F)^+$$
$$p(S_E^0,\ S_F,\ K_F) = S_E^0\,(K_F - S_F)^+$$

  - *Quanto com taxa de câmbio flutuante*: aqui, a taxa de câmbio de conversão não é fixa e sim a taxa prevalecente no dia de exercício. Essa *quanto* flexível, obviamente, não oferece proteção contra o risco cambial. No *payoff* final, o resultado é convertido por S_E^T. O apreçamento utiliza o modelo de Black e Scholes com S_F e K_F e multiplicada por S_E^T, ou seja:

$$c(S_E^T,\ S_F,\ K_F) = S_E^T\,(S_F - K_F)^+$$
$$p(S_E^T,\ S_F,\ K_F) = S_E^T\,(K_F - S_F)^+$$

[2] Para esse fim, existem as chamadas *beach (best equity-adjusted currency hedge) options*.

- ***Compo***: são instrumentos, em contraste com as *quanto options*, sobre ações estrangeiras (denominados e exercidos tanto em moeda local como em moeda estrangeira). Existem duas variantes:
  - *Opções em ações estrangeiras exercidas em moeda doméstica*: como o ativo subjacente nesse instrumento é o produto $S_E^T S_F$, a opção dependerá da correlação entre a taxa de câmbio e a ação estrangeira. Portanto, essa estrutura provém proteção contra o risco na taxa de câmbio, já que o efeito de correlação é explicitamente levado em consideração durante a avaliação da opção. Tratando-se o produto $S_E^T S_F$ como um ativo, ele é simplesmente a opção de Margrabe para trocar um montante de moeda local K com ações do ativo estrangeiro denominadas na moeda doméstica $S_E^T S_F$.

$$c(S_E^T,\ S_F,\ K) = (S_E^T S_F - K)^+$$
$$p(S_E^T,\ S_F,\ K) = (K - S_E^T S_F)^+$$

  - *Equity-linked foreign exchange option*: essa opção é, na verdade, uma opção de taxa de câmbio que coloca um piso na exposição cambial do investidor. O investidor está exposto à alta e à queda da ação estrangeira. Então, está exposto ao *downside risk* da ação embora completamente protegido contra o *downside risk* da taxa de câmbio devido ao piso. Em outras palavras, é um investimento que combina uma opção de câmbio com um termo de ação. O titular tem o direito de comprar ou vender uma ação estrangeira com moeda doméstica, que pode ser convertida da moeda estrangeira usando um preço de taxa de câmbio de exercício, expresso em unidades de moeda doméstica por unidades de moeda estrangeira.

$$c(S_E^T,\ S_F,\ K) = S_F(S_E^T - K)^+$$
$$p(S_E^T,\ S_F,\ K) = S_F(K - S_E^T)^+$$

No Brasil, existe uma variante que combina uma opção sobre uma ação com a taxa de câmbio. Nessa modalidade, o preço de exercício é expresso em pontos, sendo que cada ponto equivale a um centésimo da taxa de câmbio real por dólar norte-americano, divulgada pelo Banco Central do Brasil. Todas as negociações nesse segmento, tanto com relação aos prêmios pagos e recebidos quanto aos montantes de exercícios, são efetuadas em reais. Outra particularidade desse tipo de opção é a existência de séries protegidas e não protegidas. As séries protegidas, assim como acontece com as opções *vanilla*, têm seus preços de exercício ajustados sempre que a empresa emissora das ações-objeto distribui algum provento. Já as séries não protegidas somente são ajustadas no caso de proventos envolvendo ações do mesmo tipo (bonificações, desdobramentos e grupamentos)[3].

Como a questão básica do apreçamento de opções de troca é como avaliar opções para as quais o preço de exercício é incerto e sendo este o caso para as opções com preço de exercício corrigido pela variação cambial e por algum índice de preços, o objetivo será, exatamente, o de sugerir um modelo para o apreçamento de tais instrumentos.

---

[3] Além desta, existe modalidade denominada opções em IGP-M, que possui a particularidade de ter seu preço de exercício corrigido diariamente, a partir do dia de abertura da série, inclusive, até o dia de exercício, exclusive. A correção é feita pela multiplicação do valor em moeda local do dia por fator de correção que corresponde à taxa de variação do IGP-M do mês anterior "pró-rateada" pelos dias úteis do mês corrente. O apreçamento desses dois tipos de derivativos é feito utilizando-se o modelo original de Black e Scholes com uma adaptação diferente para cada caso.

O modelo de apreçamento

Desde que Cox, Ross e Rubinstein (CRR) publicaram, em 1979, seu trabalho sobre o apreçamento de opções utilizando método *lattice*, extensões e generalizações de tal modelo foram desenvolvidas e em especial aquelas destinadas à avaliação de derivativos multidimensionais. Dentre essas extensões, estão os trabalhos de Boyle (1988), Boyle, Evnine e Gibbs (1989), Kamrad e Ritchken (1991) e Rubinstein (1991). É este último que está sendo tratado neste artigo.

O modelo CRR assumia que o preço do ativo subjacente seguisse processo binomial multiplicativo ao longo de sucessivos intervalos de tempo discretos. Além disso, o fato de as probabilidades de ocorrência de movimentos ascendentes e descendentes de preços não constarem das fórmulas de apreçamento implica que, mesmo se investidores diferentes possuírem outras probabilidades subjetivas sobre tais movimentos, ainda assim poderiam concordar sobre a relação entre o prêmio da opção, o preço do ativo-objeto e suas taxas de retorno e a taxa de juro livre de risco. Assim, o valor do derivativo não dependeria das atitudes dos investidores em relação ao risco. Em resumo, o principal resultado do modelo é o de mostrar que o valor de uma opção pode ser interpretado como a expectativa de seu valor futuro descontado num mundo neutro ao risco.

Boyle (1988) foi o primeiro a utilizar a abordagem de CRR para a avaliação de contratos bidimensionais. A idéia básica utilizada foi a mesma, ou seja, conhecendo-se as hipóteses sobre a distribuição de probabilidade dos preços dos ativos subjacentes e certificando-se de que o apreçamento neutro ao risco é apropriado, podem ser utilizadas aproximações discretas. A diferença consistiu na substituição do processo de duplo salto por um processo trinomial, o que, para o problema bidimensional, resultou em um processo com cinco resultados possíveis. Como premissa básica, Boyle assumia a distribuição de probabilidade dos preços dos dois ativos subjacentes como lognormal bivariada. Assim, com a utilização de uma avaliação neutra ao risco, ambos os ativos deveriam render a taxa de juro livre de risco e, portanto, para especificar a distribuição de probabilidades era necessária a matriz de variâncias e covariâncias. Logo, como a distribuição de probabilidade discreta deveria possuir os mesmos valores esperados e de variâncias e covariâncias da distribuição de probabilidade original, então seriam necessários, no mínimo, cinco graus de liberdade para a construção da distribuição de probabilidade discreta. Além disso, era preciso assegurar que as probabilidades dos saltos somassem um, o que seria outro condicionante. Portanto, a construção do processo de cinco saltos mencionada anteriormente é justificada, e o único problema a ser enfrentado era como obter, nos moldes de CRR, as probabilidades (não-negativas) e amplitudes dos saltos de preços para os dois ativos subjacentes.

Foi exatamente o problema de obtenção dos valores não-negativos para as probabilidades neutras ao risco que o próprio Boyle, em conjunto com Evnine e Gibbs, atacou um ano depois. Em seu trabalho, constroem distribuição de probabilidade discreta para aproximar a distribuição de probabilidade lognormal multivariada e, para isso, escolhem os tamanhos e as probabilidades dos saltos de tal forma que a função característica das duas distribuições de probabilidade convirja. Eles propuseram modelo que, para problemas bidimensionais, utiliza uma *lattice* de quatro saltos.

Kamrad e Rithcken (1991) atendem, da forma mais objetiva e generalizada possível, à demanda por métodos de avaliação de derivativos multidimensionais com a utilização de modelos *lattice*. Em seu artigo, utilizam o fato de que prover uma ligação direta entre o processo de preços e a estratégia de arbitragem não é essencial. Na verdade, se os mercados são completos e não existem oportunidades de arbitragem, então uma medida de probabilidade martingal equivalente existe, e essa medida permite a avaliação de qualquer ativo contingente por meio do cálculo de uma expectativa condicional apropriada[4]. Além disso, seu principal resultado é um modelo multinomial que permite, ao contrário do modelo de Boyle, Evnine e Gibbs, saltos horizontais de preços.

Acontece que, no mesmo ano, Rubinstein provém uma derivação binomial para o resultado encontrado por Margrabe para opções de troca. Como no caso de opções *vanilla*, a abordagem binomial de Rubinstein clarificou a intuição econômica que estava por detrás da fórmula de Margrabe. Além disso, sua metodologia é capaz de lidar com a possibilidade de exercício antecipado das opções americanas e é este, a nosso ver, o diferencial dessa abordagem para a avaliação de opções desprotegidas para opções com preço de exercício corrigido por variação cambial em relação à solução analítica de Margrabe para as opções européias e americanas sem dividendos.

O modelo binomial de dois períodos de Rubinstein

Inicialmente, pode parecer que uma abordagem binomial não funcionaria já que após o primeiro período de tempo existem quatro possíveis resultados:

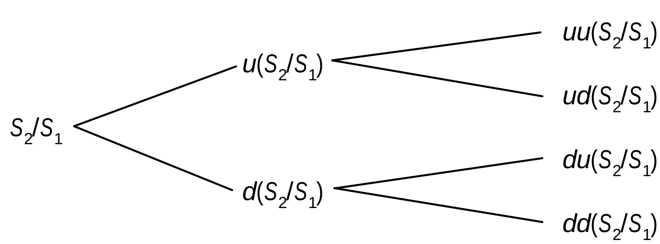
– S_1 e S_2 sobem;
– S_1 e S_2 descem;
– S_1 sobe e S_2 desce;
– S_1 desce e S_2 sobe.

No limite de tal processo, à medida que $\delta t \rightarrow 0$, isto é, à proporção que os intervalos de tempo entre cada período tendem a zero, o que se quer é que a distribuição das duas variáveis seja univariada lognormal. Isso sugere o primeiro *insight* do autor, que é o de modelar a razão de preços entre os dois ativos como binomial univariada. Assim, é proposto um ajuste que resulte em dois resultados possíveis em vez de quatro.

Seja a opção definida como:

$$w = S_1\,[S_2/S_1 - 1]^+ \qquad (1)$$

a árvore binomial para dois períodos seria:



onde:
u = 1 + taxa de crescimento dos preços relativos dos dois ativos;
d = 1 + taxa de decrescimento dos preços relativos dos dois ativos.

[4] Ver Cox e Ross (1976) e Harisson e Pliska (1981).

É óbvio que os caminhos de preço relativo *ud* e *du* terminam no mesmo ponto e que $u > 1$ e $d < 1$. Pode-se notar também que:

$w_{uu} = S_{uu1}\,[uu(S_2/S_1) - 1]^+$
$w_{ud} = S_{ud1}\,[ud(S_2/S_1) - 1]^+$
$w_{du} = S_{du1}\,[du(S_2/S_1) - 1]^+$
$w_{dd} = S_{dd1}\,[dd(S_2/S_1) - 1]^+$

Definindo-se:
$R_{uu} \equiv [uu(S_2/S_1) - 1]^+$
$R_{ud} \equiv [ud(S_2/S_1) - 1]^+$
$R_{du} \equiv [du(S_2/S_1) - 1]^+$
$R_{dd} \equiv [dd(S_2/S_1) - 1]^+$

Então:
$w_{uu} = S_{uu1}\,R_{uu}$
$w_{ud} = S_{ud1}\,R_{ud}$
$w_{du} = S_{du1}\,R_{du}$
$w_{dd} = S_{dd1}\,R_{dd}$

Cabe observar que se está assumindo os dois ativos subjacentes com uma taxa de dividendos constante a cada período. Como o interesse é na avaliação de opções americanas e como por (1) a troca de numerário iguala o problema da opção de troca ao de uma *call* americana *vanilla*, com o ativo subjacente tendo preço igual a S_2/S_1 e preço de exercício igual a 1, não há ganho nessa abordagem caso os ativos não tenham dividendos.

Devem-se considerar, agora, as duas situações possíveis durante o período 1:

– Movimento ascendente de S_2/S_1

$$W_{uu} = \Delta_2 S_{uu2}\delta_2 + \Delta_1 S_{uu1}\delta_1 = \Delta_2 S_{uu1} uu(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1 S_{uu1}\delta_1$$
$$W_{ud} = \Delta_2 S_{ud2}\delta_2 + \Delta_1 S_{ud1}\delta_1 = \Delta_2 S_{ud1} ud(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1 S_{ud1}\delta_1$$

$$W_{uu} = S_{uu1}\{\Delta_2 uu(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1\} = S_{uu1}\,R_{uu}$$
$$W_{ud} = S_{ud1}\{\Delta_2 ud(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1\} = S_{ud1}\,R_{ud}$$

$$\Delta_2 uu(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1 = R_{uu} \qquad (2.1)$$
$$\Delta_2 ud(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1 = R_{ud} \qquad (2.2)$$

– Movimento descendente de S_2/S_1

$$W_{du} = \Delta_2 S_{du2}\delta_2 + \Delta_1 S_{du1}\delta_1 = \Delta_2 S_{du1} du(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1 S_{du1}\delta_1$$
$$W_{dd} = \Delta_2 S_{dd2}\delta_2 + \Delta_1 S_{dd1}\delta_1 = \Delta_2 S_{dd1} dd(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1 S_{dd1}\delta_1$$

$$W_{du} = S_{du1}\{\Delta_2 du(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1\} = S_{du1}\,R_{du}$$
$$W_{dd} = S_{dd1}\{\Delta_2 dd(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1\} = S_{dd1}\,R_{dd}$$

$$\Delta_2 du(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1 = R_{du} \qquad (3.1)$$
$$\Delta_2 dd(S_2/S_1)\delta_2 + \Delta_1\delta_1 = R_{dd} \qquad (3.2)$$

Para encontrar os valores de Δ_1 e Δ_2, basta resolver o sistema de equações simultâneas (2.1) e (2.2) ou (3.1) e (3.2). Logo:

$$\Delta_1 = (uR_{ud} - dR_{uu})/\delta_1(u - d) \quad (4)$$
$$\Delta_2 = (R_{uu} - R_{ud})\ [u(u - d)\ (S_2/S_1)\delta_2] \quad (5)$$

Considerando-se o potencial de exercício antecipado (caso das opções americanas) no final do período 1 e que não existem oportunidades de arbitragem sem risco, o valor da opção não pode ser inferior ao valor da carteira equivalente no início do período 2. Se assim fosse, poderia ser obtido lucro sem risco e sem investimento líquido, comprando-se a opção e vendendo-se a carteira. O contrário não é, necessariamente, verdadeiro, pois o comprador da opção de troca americana que estaria sendo vendida poderia exercê-la imediatamente. Assim, é possível concluir, de acordo com o modelo CRR, que não existem oportunidades de arbitragem.

– Movimento ascendente em S_2/S_1 no período 1:

$$W_u = \Delta_2 S_{u2}\delta_2 + \Delta_1 S_{u1}\delta_1, \text{ se isso for maior que } S_{u2} - S_{u1};$$
$$W_u = S_{u2} - S_{u1}, \text{ caso contrário.}$$

Logo:

$$W_u = \text{máx}(S_{u2} - S_{u1},\ \Delta_2 S_{u2}\delta_2 + \Delta_1 S_{u1}\delta_1) \quad (6)$$

– Movimento descendente em S_2/S_1 no período 1:

$$W_d = \Delta_2 S_{d2}\delta_2 + \Delta_1 S_{d1}\delta_1, \text{ se isso for maior que } S_{d2} - S_{d1};$$
$$W_d = S_{d2} - S_{d1}, \text{ caso contrário.}$$

Assim:

$$W_d = \text{máx}(S_{d2} - S_{d1},\ D_2 S_{d2} d_2 + D_1 S_{d1} d_1) \quad (7)$$

Substituindo-se (4) e (5) em (6) e (7):

$$W_u = S_{u1}\ \text{máx}\{[u(S_2/S_1) - 1],\ [\text{p}R_{uu} + (1 - \text{p})R_{ud}]/\delta_1\} \quad (8)$$
$$W_d = S_{d1}\ \text{máx}\{[d(S_2/S_1) - 1],\ [\text{p}R_{du} + (1 - \text{p})R_{dd}]/\delta_1\} \quad (9)$$

$$\text{onde:} \text{p} \equiv [(\delta_1/\delta_2) - d]/(u - d) \quad (10)$$

Para apreçar a opção no início do período 1, deve-se definir que:

$$R_u = \text{máx}\{[u(S_2/S_1) - 1],\ [\text{p}R_{uu} + (1 - \text{p})R_{ud}]/\delta_1\}$$
$$R_d = \text{máx}\{[d(S_2/S_1) - 1],\ [\text{p}R_{du} + (1 - \text{p})R_{dd}]/\delta_1\}$$

Tal que $W_u = S_{u1}R_u$ e $W_d = S_{d1}R_d$.

Portanto:

$$W = S_1\ \text{máx}\{[(S_2/S_1) - 1],\ [\text{p}R_u + (1 - \text{p})R_d]/\delta_1\} \quad (11)$$

Isso mostra como se pode avaliar uma opção americana de troca binomialmente trabalhando-se com *backwardation* na árvore com preços relativos, usando somente o preço corrente de um dos dois ativos no último passo. Em resumo, o apreçamento de uma opção de troca americana por meio de um modelo binomial segue, a partir de uma troca de numerário, os mesmos moldes do modelo original de CRR para uma *call vanilla* com as seguintes adaptações:

- o preço relativo dos dois ativos substitui o preço do ativo subjacente no problema unidimensional;
- δ_1 substitui a taxa de juro;
- δ_2 substitui a taxa de dividendos do ativo subjacente;
- 1 é o preço de exercício.

Agora, obtêm-se os valores de *u* e *d*. Como se pode intuir, esses parâmetros também são obtidos conforme CRR, ou seja:

$$u = e^{\sigma_{12}\sqrt{\Delta t}} \qquad d = 1/u \qquad ud = 1$$

A única diferença reside no termo σ_{12}, que é o desvio-padrão de $\ln(S_2/S_1)$, ou seja:

$$\sigma^2_{12} = \sigma^2_1 - 2\,\sigma_1\,\sigma_2\rho_{12} + \sigma^2_2$$

Aplicação

As opções sobre ações com preço de exercício corrigido por variação cambial e pelo IGP-M, negociadas na Bovespa, são avaliadas, no Brasil, utilizando-se o modelo de Black e Scholes (1973) para opções *vanilla* européias sobre ações sem dividendos e com preço de exercício determinístico. As únicas adaptações feitas são a utilização da expectativa de variação cambial para o preço de exercício, obtida com a taxa do cupom cambial limpo[5] para o primeiro caso, e a utilização de uma expectativa de juro real para o segundo caso, sendo esse número obtido pela curva de rendimento dos títulos públicos em IGP-M, notadamente as NTN-Cs, ou pela estrutura a termo de taxa de juro nominal com o mercado futuro de IGP-M[6].

Assim, tendo em mente o objetivo já mencionado, foram realizados dois exercícios empíricos[7]. Em primeiro lugar, para o caso americano, utiliza-se o modelo binomial de Rubinstein (1991) para opção desprotegida de proventos em dinheiro sobre ações preferenciais nominativas da Petrobrás com preço de exercício corrigido por variação cambial e testa-se a consistência do modelo comparando, dessa vez, a evolução dos prêmios da opção com o tempo de vida desta e com o número de passos na árvore binomial. Em segundo lugar, e considerando-se o mesmo problema, verifica-se a existência de diferenças significativas entre os prêmios estimados para esse tipo de opção utilizando tanto a adaptação do mo-

---

[5] Essa expectativa é calculada pela utilização de interpolações da curva nominal de juros futuros no Brasil, representada pelo DI de um dia e da curva de cupom cambial limpo, obtida dos mercados de *forward rate agreement* de cupom cambial, ambos negociados na BM&F.

[6] Aqui cabe ressaltar que, para a determinação dos valores de garantia/margem a ser requerida dos vendedores descobertos destes instrumentos, por parte da Gerência de Controle de Risco da CBLC, não é levada em conta, ou seja, não se embute nenhuma expectativa de risco cambial, ou risco de inflação, e isso tem como conseqüência a existência de restrições, por parte tanto da Bovespa como da CBLC, para a autorização do lançamento de tais instrumentos e isso explica, ao menos em parte – ao lado da dificuldade inerente de apreçamento –, a baixa liquidez desse tipo de derivativo.

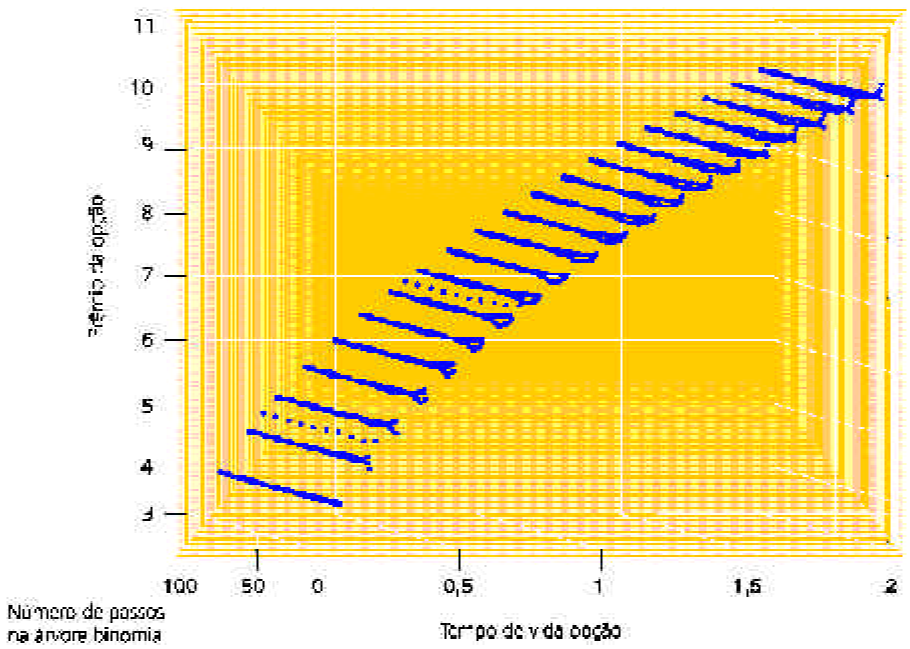
[7] Os códigos desenvolvidos no Matalab® para cada um dos exercícios propostos podem ser obtidos com os autores pelos seguintes e-mails: hugo.azevedo@macquarie.com e pepe@ibmecrj.br.

delo de Black e Scholes (1973) para opções européias *vanilla* sobre ações sem dividendos empregadas pelo mercado financeiro no Brasil como a abordagem binomial para opções de troca sugerida por Rubinstein (1991)[8].

Opções sobre ações com preço de exercício corrigido por variação cambial

O gráfico a seguir mostra a consistência do modelo binomial de Rubinstein para a avaliação de opções sobre ações com preço de exercício corrigido por variação cambial. O modelo, por definição, consegue captar o prêmio extra pela possibilidade de exercício antecipado. Note-se que esse prêmio é diretamente proporcional ao tempo de vida da opção, em especial no caso das opções desprotegidas para o pagamento de proventos em dinheiro, sejam estes dividendos, sejam juros sobre o capital próprio.

Opção americana vanilla sobre ações com preço de exercício corrigido por variação cambial



Nota: modelo de Rubinstein (1991) – PETR4.

8 É importante ressaltar que as séries temporais utilizadas são formadas pelos preços de fechamento dos ativos subjacentes nos períodos assinalados apesar de serem esses preços viesados por investidores não tomadores de preços. Podem ser utilizados, no lugar de preços de fechamento, preços médios, caso se considere o ponto de vista de um gestor de fundos de investimento, pois a marcação a mercado é feita usando-se preços médios; ou podem- ser utilizados preços de pivô, caso se considere o ponto de vista de um investidor que baseia suas decisões em análise técnica. Além disso, fica óbvio que os valores de pivô, por se tratar de média, contêm mais informação estatística do que cada um de seus valores isolados.

Opções sobre ações com preço de exercício corrigido por variação cambial: Rubinstein (1991) x Black–Scholes (1973) adaptado[9]

Tempo de vida da opção (anos)	Black–Scholes (1973) adaptado	Rubinstein (1991) Opções de troca	Diferença (R$)	%
0,10	1,6957	2,7698	(1,07)	63,34
0,20	2,5407	4,1208	(1,58)	62,19
0,30	3,1238	5,1347	(2,01)	64,37
0,40	3,5615	5,9748	(2,41)	67,76
0,50	3,9029	6,7043	(2,80)	71,78
0,60	4,1750	7,3554	(3,18)	76,18
0,70	4,3947	7,9473	(3,55)	80,84
0,80	4,5734	8,4924	(3,92)	85,69
0,90	4,7196	8,9994	(4,28)	90,68
1,00	4,8396	9,4746	(4,64)	95,77

Ativo subjacente: Petrobrás PN (PETR4)
Data de avaliação: 29/11/2003
Preço do ativo subjacente: preço médio do fechamento do dia da avaliação – R$66,60
Preço de exercício: R$68,00
Taxa de câmbio: PTAX800 do dia da avaliação arredondada para a segunda casa decimal – R$2,95
Taxa de juro nominal: 16% ao ano (base 252 dias úteis)
FRA de cupom cambial: 2% ao ano (base 360 dias corridos)
Volatilidade do ativo-objeto: 28% ao ano
Volatilidade da taxa de câmbio: 15% ao ano
Correlação entre a PETR4 e a taxa de câmbio: –0,26
Dividend yield de PETR4: 5% ao ano
Taxa de juro dos EUA: 1%
Número de passos na árvore: 100

Os resultados apresentados na tabela acima demonstram a existência de divergência entre os prêmios estimados pelos dois modelos, mas não há qualquer indicação que permita escolher um modelo em detrimento ao outro. Como observado, não existe liquidez nesse tipo de derivativo que se traduza em uma série histórica e, portanto, não é possível comparar reais observações de mercado com os prêmios estimados e mesmo que isso fosse possível, não é estritamente verdadeiro que as reais observações de mercado sejam valores obtidos de forma eficiente, nesse caso, sem possibilidades de arbitragem.

Conclusões

Como se pode inferir, o uso dos derivativos bidimensionais é de suma importância para a cobertura de posições tanto em bolsas de valores como em de mercadorias e de futuros, além dos mercados de balcão de vários países, incluindo o brasileiro. Mesmo que no último o volume de operações não seja significativo, o apreçamento correto desses contratos torna-se imprescindível para a melhor compreensão e uso desses contratos. O modelo de Rubinstein (1991) mostra-se de fácil implementação, embora existam modelos que considerem processos mais sofisticados, porém mais realistas, para a modelagem dos ativos subjacentes, como os considerados por Fajardo e Mordecki (2003). Um problema não analisado neste artigo é o relacionado aos mercados incompletos e à existência de diferentes medidas martingais equivalentes. O leitor interessado nesse tipo de proble-

[9] A taxa de juro nominal em reais, a taxa de juro dos EUA e a taxa de cupom cambial são mantidas constantes para os diferentes períodos considerados; porém isso não reflete a realidade.

ma pode encontrar uma metodologia em Fajardo (2004). Infelizmente, a implementação requer base de dados substancial que permita a estimação dos parâmetros, a qual não existe atualmente no Brasil, dado o baixo volume de operações.

Bibliografia

AZEVEDO, H.; FAJARDO, J. S. *Apreçamento de Derivativos Bidimensionais*. Anais do IV Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças, 2004.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 1973.

BOYLE, P. Options: a Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics,* 4, pp. 323–338, 1977.

_________. A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 1, pp. 1–12, 1988.

_________. EVNINE, J.; GIBBS, S. Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims, *Review of Financial Studies* 2, 1989.

_________.; TSE, Y. K. An Algorithm for Computing Values of Options on the Maximum or Minimum of Several Assets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(2), pp. 215–227, 1990.

COX, J. C., ROSS, S. A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 145–166, 1976.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229–263, 1979.

FAJARDO, J. S. *Equivalent Martingale Measures and Lévy Processes*. IBMEC Working Paper, 2004.

FAJARDO, J. S.; MORDECKI, E. Pricing Derivatives on Two Lévy-Driven Stocks. *Proceedings of the Seven Annual Meeting on Insurance: Mathematics and Economics*. Lyon, France, 2003.

HARRISON, J.M. e PLISKA, S. R. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, pp. 215–260, 1981.

JOHNSON, H. Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp. 277–283, 1987.

KAMRAD, B.; RITCHKEN, P. Multinomial Approximating Models for Option with K State Variables. *Management Science*, 37, 1991.

MARGRABE, W. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. *The Journal of Finance*, 33, pp. 177–186, 1978.

_______________. Triangular Equilibrium and Arbitrage in the Market for Options to Exchange One Asset for Another. *Journal of Derivatives*, 1, 1993.

MERTON, R. C. The Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1973.

RUBINSTEIN, M. *Exchange Options*. Não publicado, UC Berkeley, 1991.

_______________. One for Another, *Risk*, 4, pp. 30–32, 1991.

_______________. Options for the Undecided. *Risk Magazine*, 4, 1991.

_______________. Somewhere over the Rainbow, *Risk*, 10, pp. 63–66, 1991.

_______________. Return to OZ, *Risk*, 7, pp. 67–71, 1994.

_______________. *Rainbow Options*, 1995.

_______________. On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Models. *Journal of Derivatives*, 2000.

STULZ, R. Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications. *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 161–185, 1982.

Hugo Daniel de Oliveira Azevedo, responsável pela estruturação de derivativos de renda variável do Macquarie Equities Brasil, é professor da Universidade Estácio de Sá/RJ. E-mail: hugo.azevedo@macquarie.com; **José Santiago Fajardo Barbachan** é professor do mestrado profissionalizante do Ibmec/RJ. E-mail: pepe@ibmecrj.br.